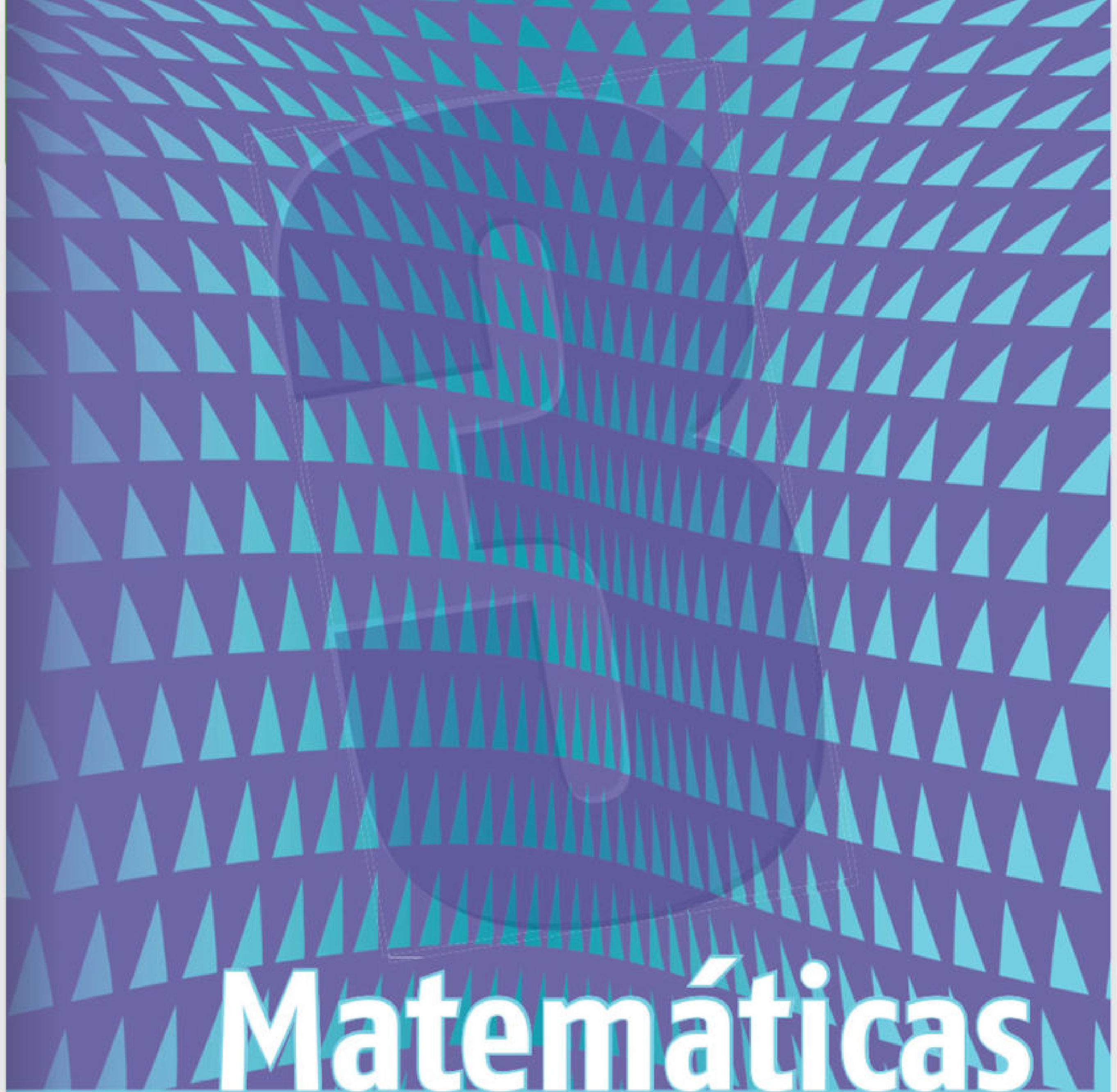


Matemáticas

Rosa María Farfán
Ricardo Cantoral
María Guadalupe Cabañas
Marcela Ferrari
Francisco Javier Lezama

3

Segunda edición

EPSA
Mc Graw Hill Education

Gerente editorial: Javier Anaya González
Editora: Teresa G. Parra Villafaña
Autores: Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza (Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN), Rosa María Farfán Márquez (Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN), María Guadalupe Cabañas Sánchez (Centro de Investigación en Matemática Educativa, UAG: Universidad Autónoma de Guerrero), Marcela Ferrari Escolá (Centro de Investigación en Matemática Educativa, UAG: Universidad Autónoma de Guerrero) y Francisco Javier Lezama Andalón (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA-IPN).
Supervisora de producción: Cristina Tapia Montes de Oca
Coordinadora de iconografía: Silvia Kenedy

Los autores de esta obra agradecen a las siguientes personas el apoyo brindado:

Daniela Reyes, Mayra Báez, Karla Gómez, Claudia Méndez, Rubén Gutiérrez, María García (Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN).

Matemáticas 3

2ª edición

McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S. A. DE C. V.
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C. P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-1171-3 (Conaliteg)

JUC 11/13

1234567890 2356789014
Impreso en México *Printed in Mexico*

Créditos iconográficos

Ilustraciones, gráficas y figuras de Guillermo Nuñez págs.: 22-24, 27-28, 30-33, 35,37-50, 58, 59, 66, 69, 71-74, 78-81, 84, 85, 87-104, 107-112, 119-121, 123 (la ilustración), 125,126, 131-135, 137-162, 170-173, 176, 177, 182, 184-198, 200-203, 205, 207-211, 213-218, 220, 226, 228, 229, 233 (ilustración de balones), 240-245, 248, 251, 257-259, 267.

De fotógrafo Jorge González págs.: 238 (cono amarillo cortado), 239 y 247.

Cortesía de Dra. Rosa Ma. Farfán, autora, pág: 123 (foto).

PRESENTACIÓN

Debido a que el principal objetivo de toda enseñanza es el logro de los aprendizajes de los estudiantes, nos esforzamos por hacer de este libro un instrumento para el aprendizaje compartido, un medio que permita articular los conceptos con sus procedimientos y que vincule los conocimientos previos, de preescolar, primaria y los dos primeros años de secundaria con el fin de desarrollar el pensamiento matemático.

Las actividades de conteo y seriación, por ejemplo, comienzan desde los primeros años de vida escolar, y se continúan en la secundaria con un nivel más avanzado de abstracción y manejo simbólico, para tratar con el número y la variable en distintas acepciones.

Los temas que abordarán los profesores de matemáticas no se limitarán a una temática específica, ya que intentamos abordar un universo de ideas matemáticas que están presentes en diversos ámbitos del conocimiento humano: las artes, el diseño, la cocina, la construcción, la biología, la física, el español, la geografía, la demografía y en diversos temas de la salud.

Para introducir un nuevo concepto matemático o para desarrollar competencias y habilidades en ese ámbito, recurrimos a los conocimientos previos y a las prácticas cotidianas, es decir, nos apoyamos en los conocimientos de la práctica social, como base para construir otros nuevos y más profundos. Todas las actividades tienen por objetivo construir procesos y conceptos matemáticos y con ello desarrollar algún aspecto del pensamiento matemático de los estudiantes.

Si quisiéramos describir, de manera breve, el desarrollo que vive el pensamiento matemático tendríamos que comenzar diciendo que éste suele interpretarse de distintas formas, por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento o del proceso de su descubrimiento e invención. Por otro, se entiende al pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; por último, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas, esta última visión eminentemente más social y cotidiana es la que guía la escritura de este libro de texto de *Matemáticas Tercer Grado*.

Con apoyo de este libro, los estudiantes aprenderán a tratar con nociones y procedimientos matemáticos que la humanidad fue construyendo lentamente a lo largo de siglos, tornando nociones en conceptos fundamentales, habilidades y competencias que servirán de base para su formación académica y ciudadana. Para agilizar la lectura de este texto hacemos notar que a lo largo del libro, al mencionar a los estudiantes y los profesores lo haremos incluyendo a ambos géneros sin tener necesariamente que hacer la distinción o aclaración de que en todos los casos nos referimos a estudiantes, profesores, compañeros, etcétera.

Esperamos contar con sus aportaciones, mismas que indudablemente enriquecerán nuestro acercamiento en la medida que nos brinden experiencias realistas de uso en aula y de este modo, coadyuven al desarrollo del pensamiento matemático en la clase de matemáticas.

Los autores

PRESENTACIÓN

Distinguido estudiante:

¿Sabías que las matemáticas son parte importante de la cultura de todos los pueblos y nos ayudan a interpretar el mundo y sus relaciones, además de permitirnos transformarlo? Ejemplos de esto último son la construcción de presas, hospitales y carreteras, pues se requiere del conocimiento y de la aplicación de las matemáticas para realizarlas. Asimismo, habrás notado que las matemáticas están presentes en muchas de las actividades que realizas de forma cotidiana: cuando compras en la tienda o pesas o mides algunos objetos; cuando reflexionas sobre la forma de las nubes o de los árboles; cuando platicas y construyes argumentos válidos y en otras actividades más. Sin duda, las matemáticas pueden resultar muy interesantes para ti y tus compañeros, ya que:

- Suelen plantearte retos intelectuales útiles y divertidos.
- Invitan a buscar y construir caminos para resolver problemas y compartir tus soluciones.
- Permiten realizar labores en equipo para construir en común estrategias ante un dilema.
- Ayudan en tus reflexiones, en tus diálogos y colaboraciones.
- Fortalecen tu entusiasmo y tu autoestima.
- Preparan para encarar las dificultades que se te presenten en la vida actual y futura.

Además de todo esto, las matemáticas te serán de gran utilidad para:

- participar en juegos cada vez más interesantes e inteligentes,
- acudir en búsqueda de información novedosa en los libros y en los sitios de internet,
- cuidar de tu salud,
- proteger el medio ambiente y
- defender tus derechos y los de tu comunidad.

Este libro, *Matemáticas Tercer Grado*, de la serie *Desarrollo del pensamiento matemático*, fue concebido con un objetivo primordial: contribuir al desarrollo de tu propio pensamiento matemático para que continúes exitosamente tus estudios y te adaptes a los retos del mundo contemporáneo. Las lecciones contienen temas diversos con problemas y ejercicios que resultarán de tu interés y que podrás realizar en tu salón de clases o en tu entorno, individualmente o en equipo, pensando, buscando información y compartiendo tus ideas. Si tienes acceso a una computadora en la escuela, en tu casa o en un café internet, te invitamos a realizar varias actividades como visitar sitios de la red interesantes, acceder a programas interactivos disponibles gratuitamente y demás herramientas tecnológicas. Deseamos finalizar esta página deseándote un gran éxito en este curso.

Los autores

PRESENTACIÓN

A los profesores

Estimados colegas:

Matemáticas Tercer Grado, de la serie *Desarrollo del Pensamiento Matemático*, tiene como propósito principal servir de apoyo al aprendizaje de sus estudiantes. Es una propuesta didáctica que asume a las matemáticas como parte fundamental de la cultura y, no restringe su enseñanza al empleo de técnicas de repetición y memorización.
Utiliza estrategias de aprendizaje basadas en teorías didácticas contemporáneas, que si bien parten del constructivismo, requieren de la participación más activa del profesor y sus alumnos en un entorno cooperativo.
Dos principios guían la propuesta de *Matemáticas Tercer Grado*:

- **Principio 1.** Las matemáticas son parte fundamental de la cultura.
- **Principio 2.** Nadie aprende un concepto o procedimiento matemático sin vivir un proceso de adaptación a la situación que lo hace necesario.

La obra consta de cinco bloques agrupados en 33 lecciones que desarrollan los tres ejes de la enseñanza de esta asignatura:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Forma, espacio y medida.
- Manejo de la información.

Cada bloque inicia con una introducción que tiene la intención de ser la base para solicitar a los estudiantes una participación compartida, empezar la sesión del bloque con una charla entre pares y dar pie, progresivamente, al debate matemático. En esta página se incluyen los aprendizajes esperados. Cada lección inicia con el objetivo de la misma y enseguida se abordan las actividades de aprendizaje cuya estructura atiende a las siguientes secciones:

- Para aprender: introduce los conceptos a través de situaciones de aprendizaje; se espera del alumno una acción deliberada y dirigida por la situación. Es fundamental que los alumnos piensen de forma individual la actividad y luego la platiquen en pequeños equipos.
- Los métodos: su objetivo es dejar establecida la parte básica de lo que han aprendido los estudiantes; aquello a lo que pueden volver cada vez que necesiten reforzamiento.
- Para hacer: contiene problemas y ejercicios que van de lo simple a lo complejo y de la diversidad a la síntesis. Al final de cada lección proponemos desafíos intelectuales que pueden ser abordados a partir de las actividades previas.

Cada una de esas secciones tiene una finalidad específica, se favorece la transición de la acción a la formulación y de ahí a la validación, para alcanzar una socialización de lo aprendido.

Al terminar cada bloque se incluye una evaluación con problemas tipo PISA que permite la resolución de problemas y ejercicios no circunscritos al salón de clases, pues algunos de ellos pueden, y se aconseja que deban, realizarse fuera de éste.

Por último, estimados colegas, queremos apuntar que el enriquecimiento de este libro precisa de sus experiencias y sugerencias, que siempre serán bienvenidas.

¡Éxito!

Afectuosamente, los autores

PRESENTACIÓN

Presentación 3
Así es mi libro 11
Dosificación 17

Bloque 1

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Lección 1.1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. 22

Forma, espacio y medida

Figuras y cuerpos

Lección 1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. 28

Lección 1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada. 37

Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

Lección 1.4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. 45

Lección 1.5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. 52

Nociones de probabilidad

Lección 1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. 56

ÍNDICE

Análisis y representación de datos

Lección 1.7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación. 64

Evaluación 71
Autoevaluación 76
Coevaluación 76

Bloque 2

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Lección 2.1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización. 78

Forma, espacio y medida

Figuras y cuerpos

Lección 2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. 87

Lección 2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. 96

Medida

Lección 2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. 102

Lección 2.5 Explicitación y uso del Teorema de Pitágoras. 106

Manejo de la información

Nociones de probabilidad

Lección 2.6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma). 112

Evaluación 119
Autoevaluación 122
Coevaluación 122

ÍNDICE

Bloque 3

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Lección 3.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones. 124

Forma, espacio y medida

Figuras y cuerpos

Lección 3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. 131

Lección 3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el Teorema de Tales........... 137

Lección 3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas. 144

Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

Lección 3.5 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.. 151

Lección 3.6 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera. 159

Nociones de probabilidad

Lección 3.7 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto). 164

Evaluación.. 170

Autoevaluación 173

Coevaluación.. 174

Bloque 4

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Lección 4.1 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.. 176

Forma, espacio y medida

Figuras y cuerpos

Lección 4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.................................. 184

Medida

Lección 4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. 189

Lección 4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. 198

Lección 4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. 205

Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

Lección 4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa. 213

Análisis y representación de datos

Lección 4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato respecto a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.. 219

Evaluación.. 226

Autoevaluación 230

Coevaluación 230

ÍNDICE

Bloque 5

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Patrones y ecuaciones

Lección 5.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada. 232

Forma, espacio y medida

Medida

Lección 5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. 238

Lección 5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. 245

Lección 5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas. 251

Manejo de la información

Proporcionalidad y funciones

Lección 5.5 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. 256

Nociones de probabilidad

Lección 5.6 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables. 261

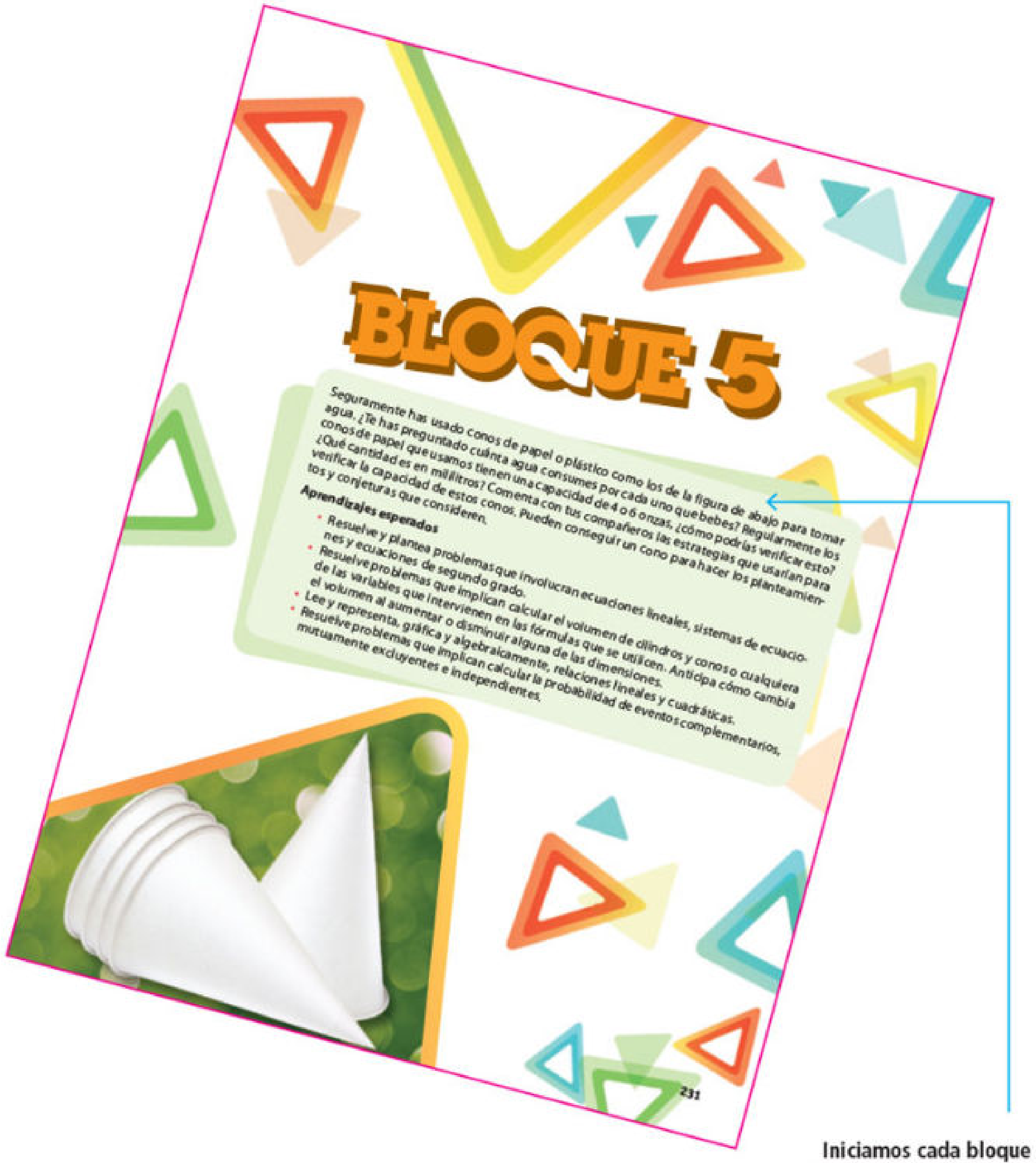
Evaluación 266

Autoevaluación 268

Coevaluación 269

Bibliografía 270

ASÍ ES MI LIBRO



BLOQUE 5

Seguramente has usado conos de papel o plástico como los de la figura de abajo para tomar agua. ¿Te has preguntado cuánta agua consumes por cada uno que bebes? Regularmente los conos de papel que usamos tienen una capacidad de 4 o 6 onzas, ¿cómo podrías verificar esto? ¿Qué cantidad es en mililitros? Comenta con tus compañeros las estrategias que usarían para verificar la capacidad de estos conos. Pueden conseguir un cono para hacer los planteamientos y conjeturas que consideren.

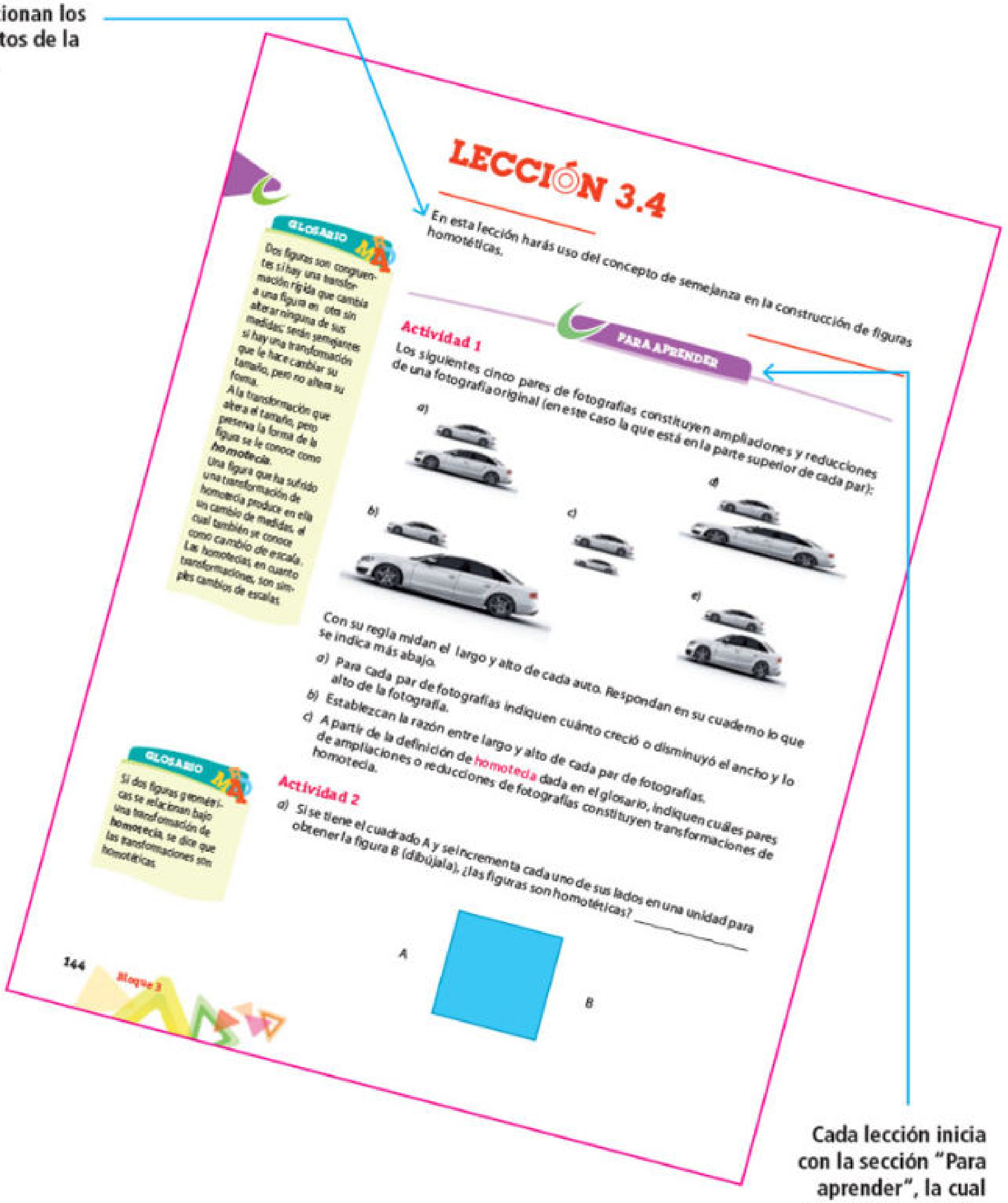
Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

231

Iniciamos cada bloque con información que da pie para solicitar a los estudiantes una participación compartida, con una charla entre pares.

Al principio se proporcionan los propósitos de la lección.



LECCIÓN 3.4

En esta lección harás uso del concepto de semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

GLOSARIO

Dos figuras son congruentes si hay una transformación rígida que cambia a una figura en otra sin alterar ninguna de sus medidas; serán semejantes si hay una transformación que le hace cambiar su tamaño, pero no altera su forma.
A la transformación que altera el tamaño, pero preserva la forma de la figura se le conoce como **homotecia**.
Una figura que ha sufrido una transformación de homotecia produce en ella un cambio de medidas, el cual también se conoce como cambio de escala.
Las homotecias, en cuanto transformaciones, son simples cambios de escalas.

PARA APRENDER

Actividad 1

Los siguientes cinco pares de fotografías constituyen ampliaciones y reducciones de una fotografía original (en este caso la que está en la parte superior de cada par):

Con su regla midan el largo y alto de cada auto. Respondan en su cuaderno lo que se indica más abajo.

a) Para cada par de fotografías indiquen cuánto creció o disminuyó el ancho y lo alto de la fotografía.
b) Establezcan la razón entre largo y alto de cada par de fotografías.
c) A partir de la definición de homotecia dada en el glosario, indiquen cuáles pares de ampliaciones o reducciones de fotografías constituyen transformaciones de homotecia.

GLOSARIO

Si dos figuras geométricas se relacionan bajo una transformación de homotecia, se dice que las transformaciones son homotéticas.

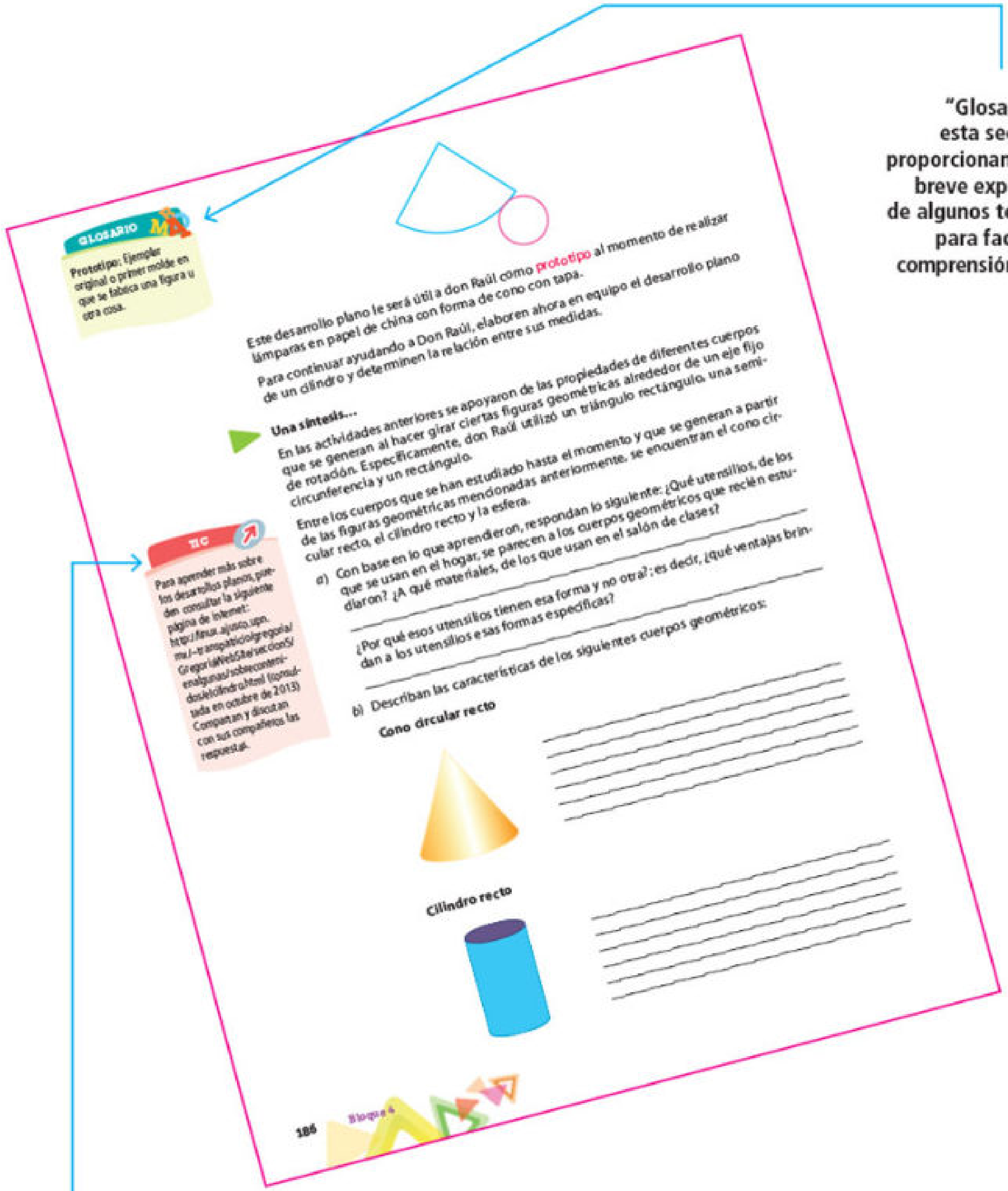
Actividad 2

a) Si se tiene el cuadrado A y se incrementa cada uno de sus lados en una unidad para obtener la figura B (dibújala). ¿las figuras son homotéticas? ________

144 Bloque 3

Cada lección inicia con la sección "Para aprender", la cual contiene actividades para encauzar tu aprendizaje.

"Glosario", en esta sección te proporcionamos una breve explicación de algunos términos para facilitar la comprensión de los textos.



GLOSARIO

Prototipo: Ejemplar original o primer molde en que se fabrica una figura u otra cosa.

Este desarrollo plano le será útil a don Raúl como prototipo al momento de realizar lámparas en papel de china con forma de cono con tapa.

Para continuar ayudando a Don Raúl, elaboren ahora en equipo el desarrollo plano de un cilindro y determinen la relación entre sus medidas.

Una síntesis...

En las actividades anteriores se apoyaron de las propiedades de diferentes cuerpos que se generan al hacer girar ciertas figuras geométricas alrededor de un eje fijo de rotación. Específicamente, don Raúl utilizó un triángulo rectángulo, una semicircunferencia y un rectángulo.

Entre los cuerpos que se han estudiado hasta el momento y que se generan a partir de las figuras geométricas mencionadas anteriormente, se encuentran el cono circular recto, el cilindro recto y la esfera.

TIC

Para aprender más sobre los desarrollos planos, pueden consultar la siguiente página de internet: [illegible] (consultada en octubre de 2013) Comparen y discutan con sus compañeros las respuestas.

Con base en lo que aprendieron, respondan lo siguiente:

a) ¿Qué utensilios, de los que se usan en el hogar, se parecen a los cuerpos geométricos que recién estudiaron? ¿A qué materiales, de los que usan en el salón de clases? ________

¿Por qué esos utensilios tienen esa forma y no otra?; es decir, ¿qué ventajas brindan a los utensilios esas formas específicas? ________

b) Describan las características de los siguientes cuerpos geométricos:

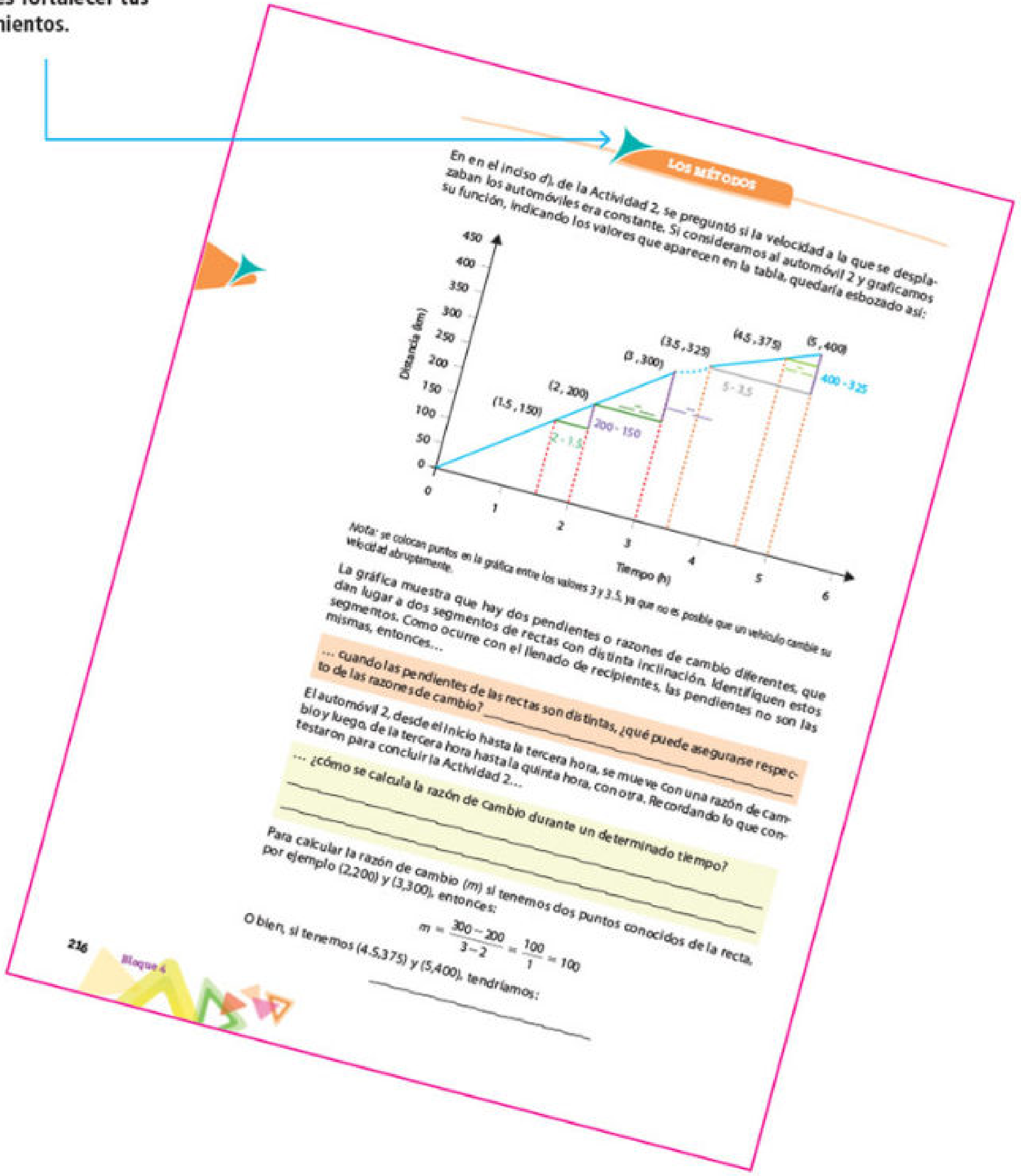
Cono circular recto

Cilindro recto

186 Bloque 4

"TIC". Sugerencias de visitas a sitios electrónicos de interés.

"Los métodos" es la sección que desglosa la parte básica de lo aprendido; aquello a lo que puedes volver cuando necesites fortalecer tus conocimientos.



LOS MÉTODOS

En en el inciso *d*), de la Actividad 2, se preguntó si la velocidad a la que se desplazaban los automóviles era constante. Si consideramos al automóvil 2 y graficamos su función, indicando los valores que aparecen en la tabla, quedaría esbozado así:

Nota: se colocan puntos en la gráfica entre los valores 3 y 3.5, ya que no es posible que un vehículo cambie su velocidad abruptamente.

La gráfica muestra que hay dos pendientes o razones de cambio diferentes, que dan lugar a dos segmentos de rectas con distinta inclinación. Identifiquen estos segmentos. Como ocurre con el llenado de recipientes, las pendientes no son las mismas, entonces...

... cuando las pendientes de las rectas son distintas, ¿qué puede asegurarse respecto de las razones de cambio? __________

El automóvil 2, desde el inicio hasta la tercera hora, se mueve con una razón de cambio y luego, de la tercera hora hasta la quinta hora, con otra. Recordando lo que contestaron para concluir la Actividad 2...

... ¿cómo se calcula la razón de cambio durante un determinado tiempo?

____

____

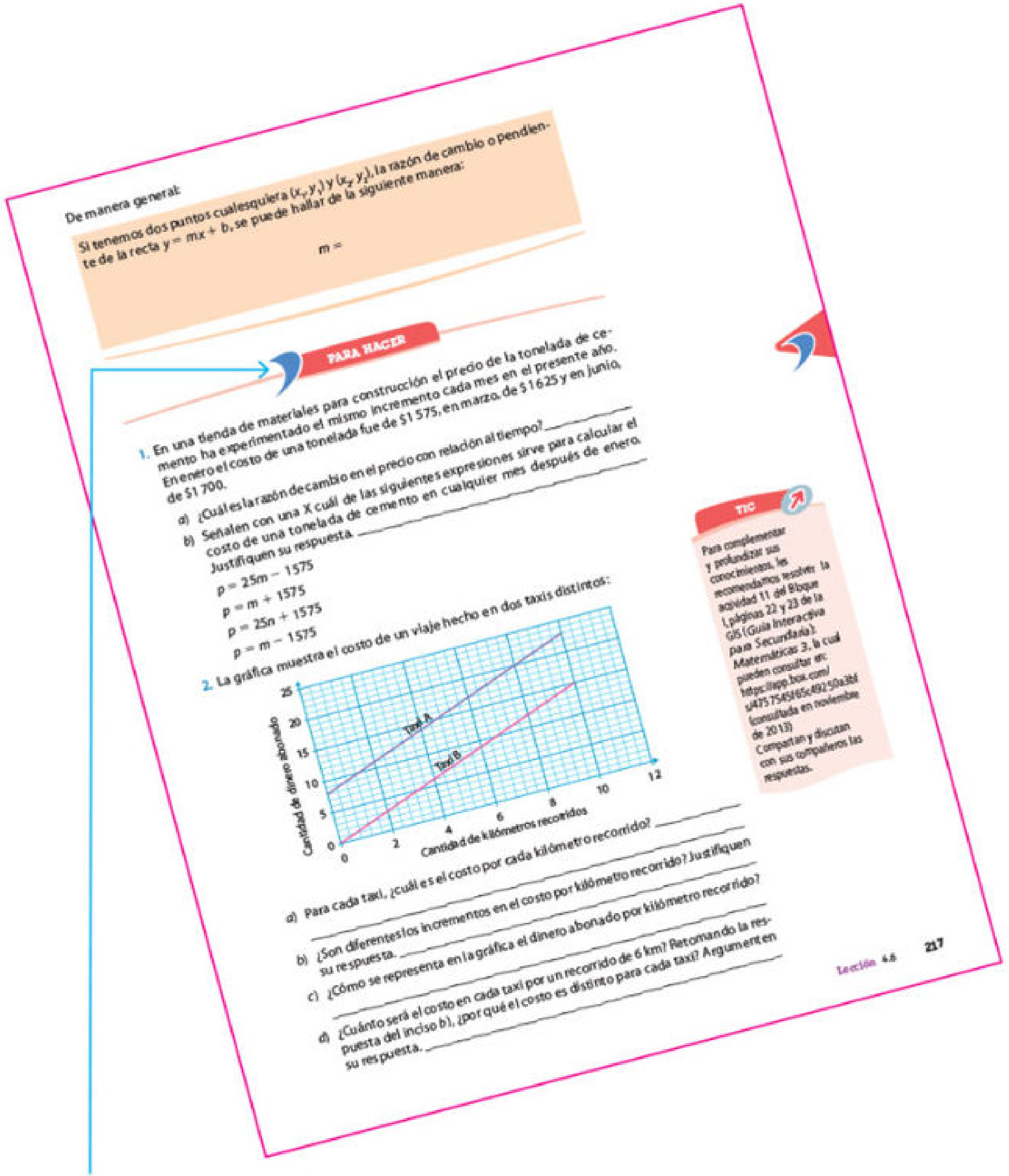
Para calcular la razón de cambio (*m*) si tenemos dos puntos conocidos de la recta, por ejemplo (2,200) y (3,300), entonces:

$$m = \frac{300 - 200}{3 - 2} = \frac{100}{1} = 100$$

O bien, si tenemos (4.5,375) y (5,400), tendríamos:

____

216 Bloque 4



De manera general:

Si tenemos dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la razón de cambio o pendiente de la recta $y = mx + b$, se puede hallar de la siguiente manera:

$$m =$$

PARA HACER

1. En una tienda de materiales para construcción el precio de la tonelada de cemento ha experimentado el mismo incremento cada mes en el presente año. En enero el costo de una tonelada fue de $1 575, en marzo, de $1 625 y en junio, de $1 700.
   - *a*) ¿Cuál es la razón de cambio en el precio con relación al tiempo? __________
   - *b*) Señalen con una X cuál de las siguientes expresiones sirve para calcular el costo de una tonelada de cemento en cualquier mes después de enero. Justifiquen su respuesta. __________

$p = 25m - 1575$

$p = m + 1575$

$p = 25n + 1575$

$p = m - 1575$

2. La gráfica muestra el costo de un viaje hecho en dos taxis distintos:

- *a*) Para cada taxi, ¿cuál es el costo por cada kilómetro recorrido? __________
- *b*) ¿Son diferentes los incrementos en el costo por kilómetro recorrido? Justifiquen su respuesta. __________
- *c*) ¿Cómo se representa en la gráfica el dinero abonado por kilómetro recorrido? __________
- *d*) ¿Cuánto será el costo en cada taxi por un recorrido de 6 km? Retomando la respuesta del inciso *b*), ¿por qué el costo es distinto para cada taxi? Argumenten su respuesta. __________

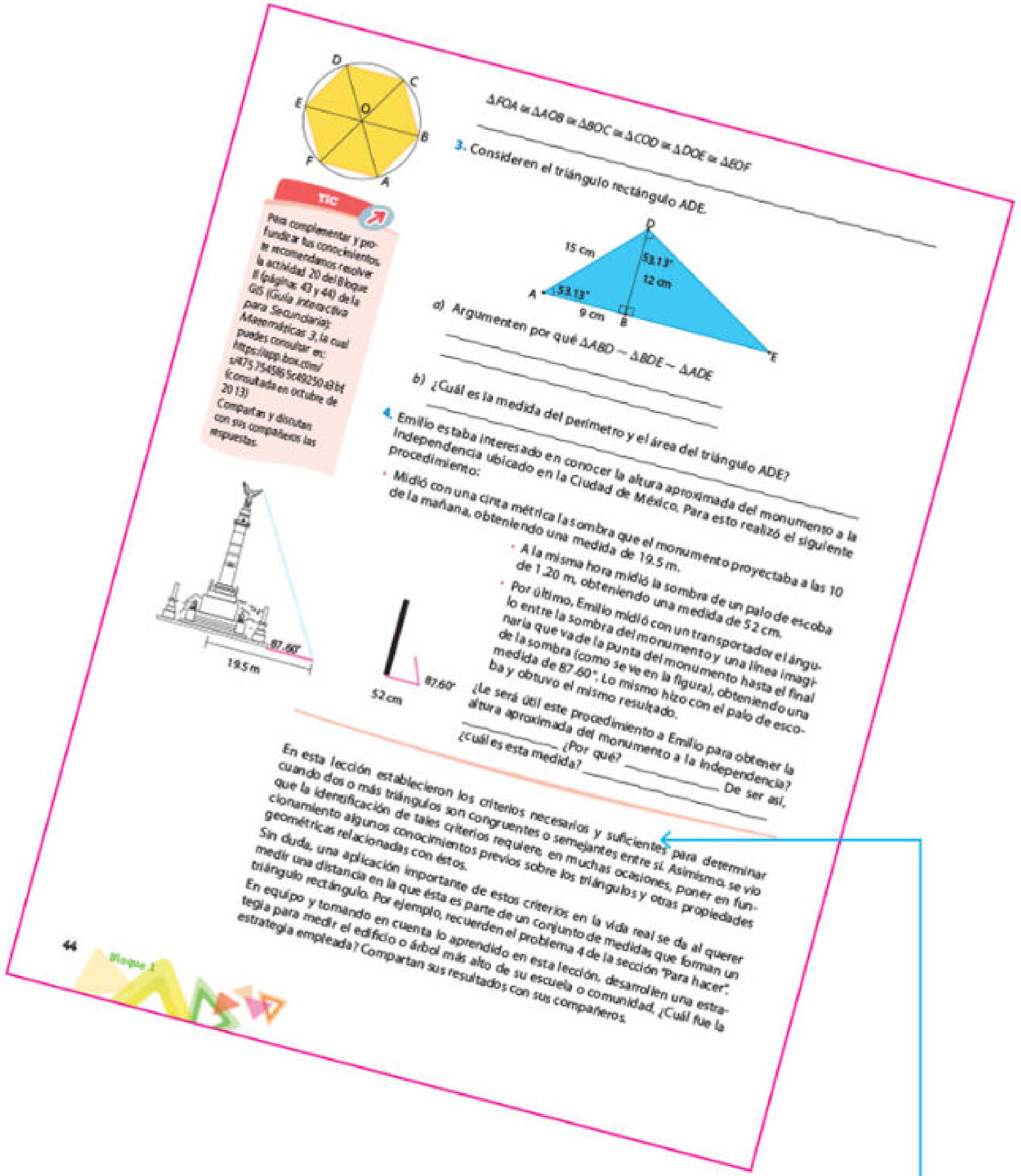
TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver la actividad 11 del Bloque 1, páginas 22 y 23 de la GIS (Guía Interactiva para Secundaria) Matemáticas 3, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/ [illegible] (consultada en noviembre de 2013).
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Lección 4.6 217

"Para hacer", esta sección se compone de problemas y ejercicios fundamentales para consolidar los conocimientos, profundizarlos y sintetizarlos.

ASÍ ES MI LIBRO



$\Delta FOA \cong \Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta COD \cong \Delta DOE \cong \Delta EOF$

3. Consideren el triángulo rectángulo ADE.

a) Argumenten por qué $\Delta ABD \sim \Delta BDE \sim \Delta ADE$

b) ¿Cuál es la medida del perímetro y el área del triángulo ADE?

4. Emilio estaba interesado en conocer la altura aproximada del monumento a la Independencia ubicado en la Ciudad de México. Para esto realizó el siguiente procedimiento:

- Midió con una cinta métrica la sombra que el monumento proyectaba a las 10 de la mañana, obteniendo una medida de 19.5 m.
- A la misma hora midió la sombra de un palo de escoba de 1.20 m, obteniendo una medida de 52 cm.
- Por último, Emilio midió con un transportador el ángulo entre la sombra del monumento y una línea imaginaria que va de la punta del monumento hasta el final de la sombra (como se ve en la figura), obteniendo una medida de 87.60°. Lo mismo hizo con el palo de escoba y obtuvo el mismo resultado.

¿Le será útil este procedimiento a Emilio para obtener la altura aproximada del monumento a la Independencia? ________ ¿Por qué? ________ De ser así, ¿cuál es esta medida? ________

TIC

Para complementar y profundizar tus conocimientos te recomendamos resolver la actividad 20 del Bloque II (páginas 43 y 44) de la GIS (Guía interactiva para Secundaria) Matemáticas 3, la cual puedes consultar en: https://app.box.com/s475754586 5c49250d3bf (consultada en octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

En esta lección establecieron los criterios necesarios y suficientes para determinar cuando dos o más triángulos son congruentes o semejantes entre sí. Asimismo, se vio que la identificación de tales criterios requiere, en muchas ocasiones, poner en funcionamiento algunos conocimientos previos sobre los triángulos y otras propiedades geométricas relacionadas con éstos.

Sin duda, una aplicación importante de estos criterios en la vida real se da al querer medir una distancia en la que ésta es parte de un conjunto de medidas que forman un triángulo rectángulo. Por ejemplo, recuerden el problema 4 de la sección "Para hacer". En equipo y tomando en cuenta lo aprendido en esta lección, desarrollen una estrategia para medir el edificio o árbol más alto de su escuela o comunidad. ¿Cuál fue la estrategia empleada? Compartan sus resultados con sus compañeros.

44 Bloque 1

Al final de las lecciones encontrarás una síntesis a modo de cierre y preguntas sobre tu aprendizaje para fomentar la retroalimentación.

DOSIFICACIÓN

			Bloque 1	Calendarización del profesor
Semana	Lecciones	Páginas	Contenido	
			Sentido numérico y pensamiento algebraico	
1	1.1	22-27	Patrones y ecuaciones Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	
			Forma, espacio y medida	
2	1.2	28-36	Figuras y cuerpos Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	
3	1.3	37-43	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	
			Manejo de la información	
4	1.4	44-50	Proporcionalidad y funciones Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	
5	1.5	51-55	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	
6	1.6	56-63	Nociones de probabilidad Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	
7 y 8	1.7	64-70	Análisis y representación de datos Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	

			Bloque 2	Calendarización del profesor
Semana	Lecciones	Páginas	Contenido	
			Sentido numérico y pensamiento algebraico	
9	2.1	78-86	Patrones y ecuaciones Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	

Bloque 2				Calendarización del profesor
Semana	Lecciones	Páginas	Contenido	
			Forma, espacio y medida	
10	2.2	87-95	Figuras y cuerpos Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	
11	2.3	96-101	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	
12	2.4	102-105	Medida Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	
13	2.5	106-111	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	
			Manejo de la información	
14 y 15	2.6	112-118	Nociones de probabilidad Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	

Bloque 3				Calendarización del profesor
Semana	Lecciones	Páginas	Contenido	
			Sentido numérico y pensamiento algebraico	
16	3.1	124-130	Patrones y ecuaciones Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	
			Forma, espacio y medida	
17	3.2	131-136	Figuras y cuerpos Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	
18	3.3	137-143	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	
19	3.4	144-150	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	
			Manejo de la información	

Bloque 3				Calendarización del profesor
Semana	Lecciones	Páginas	Contenido	
20	3.5	151-158	Proporcionalidad y funciones Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	
21	3.6	159-163	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	
22 y 23	3.7	164-169	Nociones de probabilidad Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	

Bloque 4				Calendarización del profesor
Semana	Lecciones	Páginas	Contenido	
			Sentido numérico y pensamiento algebraico	
24	4.1	176-183	Patrones y ecuaciones Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	
			Forma, espacio y medida	
25	4.2	184-188	Figuras y cuerpos Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	
26	4.3	189-197	Medida Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	
27	4.4	198-204	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	
28	4.5	205-212	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	
			Manejo de la información	
29	4.6	213-218	Proporcionalidad y funciones Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	

DOSIFICACIÓN

Bloque 4				Calendarización del profesor
Semana	**Lecciones**	**Páginas**	**Contenido**	
30 y 31	4.7	219-225	Análisis y representación de datos Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato respecto a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	

Bloque 5				Calendarización del profesor
Semana	**Lecciones**	**Páginas**	**Contenido**	
			Sentido numérico y pensamiento algebraico	
32	5.1	232-237	Patrones y ecuaciones Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	
			Forma, espacio y medida	
33	5.2	238-244	Medida Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	
34	5.3	245-250	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	
35	5.4	251-255	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	
			Manejo de la información	
36	5.5	256-260	Proporcionalidad y funciones Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	
37 y 38	5.6	261-265	Nociones de probabilidad Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	
39 y 40			Tiempo para evaluaciones y repasos generales	

BLOQUE 1

Cuando se juega al fútbol con los amigos se hace un sorteo para saber cuál de los dos equipos *toca* primero el balón. Generalmente el sorteo consiste en lanzar una moneda al aire y estimar si caerá *águila* o *sol*, el representante de cada equipo elije una de estas opciones y gana quien le atine. Sin embargo, para tener más posibilidades de ganar algunas veces se decide por hacer tres lanzamientos, quien acierte dos veces será el quipo que *tocará* primero el balón. Si en el primer lanzamiento sale águila, ¿consideras que en el segundo lanzamiento saldrá águila también? Si en el segundo lanzamiento sale sol, ¿qué resultado crees que se obtendrá en el tercer lanzamiento? ¿Quién tiene más probabilidad de ocurrir: águila o sol? Comenta con un compañero cómo le llamarían a estos sucesos.

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Sol y águila en una moneda de cinco pesos

LECCIÓN 1.1

En esta lección aprenderás a resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

PARA APRENDER

Formen equipos para discutir las actividades de esta lección, donde analizarán con sus compañeros diferentes situaciones en las cuales será necesario que determinen expresiones algebraicas que describan los fenómenos involucrados, así como generar estrategias para resolver los problemas que se presenten.

Actividad 1. Construcción de cuadrados

Dibujen en sus cuadernos un cuadrado de 1 cm de lado, contesten las preguntas y coloreen el área que ocupa.

a) ¿Cuánto mide el área que han pintado?

b) Extiendan los lados del primer cuadrado 1 cm. ¿Cuál será el área del nuevo cuadrado?, ¿cuánto aumentó en comparación con el área del cuadrado anterior?

c) Y si aumentamos otro centímetro en cada lado, ¿cuál es el área de este nuevo cuadrado?

d) Si seguimos aumentando 1 cm a cada lado, podríamos organizar los datos en una tabla como la siguiente:

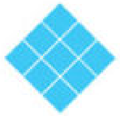
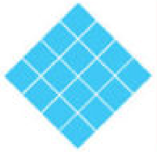
Medida del lado	1	2	3					
Área del cuadrado								

¿Cómo determinar el área de un cuadrado de lado *n*? Escriban la conclusión a la que llegaron.

e) Si el área del cuadrado es de 121 cm², ¿cuánto mide el lado del cuadrado? Y si el lado del cuadrado midiera 2.25 cm, ¿cuál sería su área? Expliquen la estrategia que utilizaron para determinar la medida de los lados y discútanla con su profesor.

Actividad 2. Sigamos construyendo cuadrados

Utilizando cuadrados pequeños se generó la siguiente sucesión de figuras:

Posición	1	2	3	4
Sucesión				
Número de cuadraditos:	1	4	9	16...

GLOSARIO

Sucesión: conjunto ordenado de objetos que se suceden unos a otros según un criterio determinado.

a) Construyan una expresión algebraica que les permita determinar el número de cuadraditos azules de cualquier figura de la sucesión. Escriban en su cuaderno la estrategia que utilizaron. ¿En qué posición habría 81 cuadraditos?

b) Establezcan una expresión algebraica que les permita determinar el número de cuadraditos que se utilizan para formar cualquier figura de la siguiente sucesión, en la que sólo se agregó un cuadrado verde. ¿En qué posición se tendrían 122 cuadraditos?

Posición	1	2	3	4
Sucesión				
Número de cuadraditos:	2	5	10	17...

c) Escriban una expresión algebraica para determinar el número de cuadraditos que se utilizan para formar cualquier figura de la siguiente sucesión. ¿En qué posición habrá 56 cuadraditos?

Posición	1	2	3	4
Sucesión				
Número de cuadraditos:	2	6	12	20...

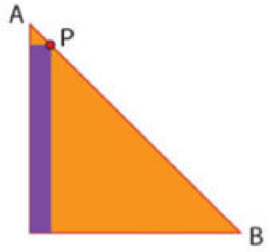
d) Construyan ahora una sucesión de figuras que cumplan con la regla: $x^2 + x + 1$. Escriban en sus cuadernos la estrategia que utilizaron y reflexionen sobre el significado de la expresión $x^2 + x + 1 = 3$.

e) Discutan con sus compañeros y profesor las expresiones que asociaron a las sucesiones anteriores y expliquen la estrategia que utilizaron para determinar la posición de la figura solicitada.

Para resolver las actividades anteriores han recurrido a expresiones algebraicas cuadráticas para describir el crecimiento del área de los cuadrados solicitados o la cantidad de cuadraditos en las sucesiones presentadas. Reflexionen con sus compañeros y su profesor sobre las estrategias que han utilizado al resolver y analizar estas actividades.

Actividad 3. Un triángulo especial

Construyan un triángulo rectángulo isósceles donde sus lados iguales midan 10 cm y marquen un punto P como se observa en la figura.



a) Imaginen que el punto P sólo se puede desplazar sobre el segmento $\overline{AB}$ del triángulo. Dibujen el punto P en diferentes posiciones y determinen el área del rectángulo que se forma. Organicen sus cálculos en la siguiente tabla.

TIC

Si conocen **GeoGebra**, utilícenlo para el problema de la Actividad 3, construyendo el triángulo ABC y el punto P, moviéndose por la hipotenusa AB. Soliciten apoyo a su profesor para unir los elementos y lograr visualizar el cambio de las áreas de los rectángulos. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Medida de la base (cm)	Medida de la altura (cm)	Área del rectángulo (cm²)
1	9	9
2	8	
3		21

b) Si la base del rectángulo que determina P mide *x*, ¿cuál es la altura del rectángulo en términos de *x*?, ¿cómo calcular el área de este rectángulo? Discútanlo con sus compañeros y escriban la expresión algebraica en sus cuadernos.

c) ¿Dónde se debe colocar el punto P para que el área del rectángulo mida 24 cm²? ¿Y para que el área sea de 20 cm²? Analicen con su profesor si es la única posición en la que se puede colocar P para obtener esos valores de su área o existen otras.

Actividad 4. Para determinar distancias

La profesora de Física de Juan y Melvis les pidió medir de diferentes maneras distancias entre dos objetos. Algunos de sus compañeros comentaron que lo harían con pasos, otros con una vara de un metro; sin embargo, ellos deciden hacerlo usando un carrito eléctrico.

Juan coloca la rueda del carrito eléctrico de tal manera que coincida con la punta de sus pies, en tanto que Melvis se coloca en línea recta a la distancia que ambos desean determinar. Con un cronómetro y el velocímetro del carrito eléctrico logran completar la siguiente tabla:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20		
Velocidad (metros/segundos)	0	1	2	3	4		

a) Completen la tabla anterior y a continuación grafiquen los datos.

¿Sabías que?

Con el fin de describir y estudiar un movimiento rectilíneo, Oresme (matemático francés del siglo XIV) ideó la representación gráfica de la velocidad instantánea de un móvil en función del tiempo.
Si les interesa conocer más, hallarán información en el Centro Virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española: http://divulgamat2.ehu.es/ (consultada en septiembre de 2013)

b) Determinen una expresión algebraica que describa la velocidad del carrito y discútanla con sus compañeros y profesor.

c) En las clases de Física del curso anterior Melvis y Juan aprendieron que la distancia recorrida por un móvil se calcula determinando el área bajo la curva de su gráfica de velocidad contra tiempo. Exploren esta idea y determinen la distancia recorrida en cada intervalo. Completen la siguiente tabla con sus cálculos.

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20		
Distancia (metros)	0	2.5					

Respondan en sus cuadernos lo siguiente:

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe la distancia recorrida en cualquier segundo? Escríbanla en su cuaderno y utilícenla para determinar la distancia que han recorrido luego de 2.5 segundos y ocho segundos.

e) ¿Cuánto tiempo habrá pasado para que el carrito se encuentre a 10 metros del punto inicial? ¿Y a 15 metros?

f) Describan la estrategia que han utilizado para determinar la distancia que ha recorrido el carrito en determinado tiempo, si se conoce la manera en la que varía su velocidad. Analícenlo con sus compañeros y profesor.

Una síntesis...

En lecciones anteriores estudiaron que las ecuaciones de primer grado tienen la forma $ax + b = 0$, donde *a* y *b* son números que por lo general conocemos y *x* es la incógnita cuyo exponente máximo es 1 (aunque usualmente no se escribe) y que da el nombre al tipo de ecuación.

En las actividades de esta lección abordamos diversas situaciones que condujeron al planteamiento de expresiones algebraicas cuadráticas pues el mayor exponente que aparece en los polinomios utilizados es 2. Cuando esas expresiones (miembros) se enlazan a través de un signo igual (=) conforman una ***ecuación***.

Por ejemplo $x^2 + x = 20$ es una *ecuación cuadrática* pues la expresión "$x^2 + x$", que determinaron en la Actividad 2, debe ser igual a 20. Ahí radica el problema de las ecuaciones: buscar los valores correctos para que la igualdad se dé. Sin embargo, es posible que ningún valor asignado a la incógnita, en este caso la *x*, haga cierta la igualdad y también es posible que cualquier valor asignado a la incógnita sea correcto.

En general, las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas tienen la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en las cuales el exponente máximo de la incógnita es 2, *a*, *b* y *c* son números que suelen conocerse y a lo mucho tiene dos soluciones. Por ejemplo,

$$x^2 + 1 = 8$$

admite dos soluciones: $x_1 = 3$ y $x_1 = -3$.

Discutan en grupo la manera de verificar que son las soluciones de esta ecuación y escriban la conclusión a la que han llegado:

____

____

____

GLOSARIO

Ecuación: es una relación de igualdad entre dos miembros y expresa una condición: el valor de la izquierda debe ser igual al valor de la derecha del signo "igual".

LOS MÉTODOS

Resolver una ecuación es encontrar un valor o valores para cada una de las incógnitas, de manera que la igualdad se mantenga o se compruebe. Por ejemplo, en la Actividad 4, la distancia (*d*) que recorre el carrito eléctrico puede ser descrita con la expresión:

$$d = \frac{1}{10}t^2$$

¿Cómo hallar las soluciones de esta ecuación cuadrática? Discutan y escriban la estrategia que se podría utilizar para determinar el tiempo necesario para que el carrito avance 10 metros.

En problemas como éste, se obtendrían dos soluciones distintas; sin embargo, para dar la respuesta a la pregunta sobre el tiempo, ¿se pueden aceptar ambas? ¿Qué decisión se debería tomar? ¿Por qué?

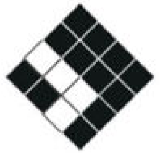
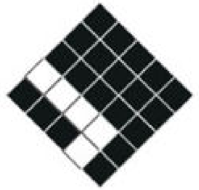
Al resolver una ecuación cuadrática podríamos llegar a la conclusión de que no existe solución, hay una única solución, o que existen dos soluciones, es decir, hay tres opciones en el mundo de los números reales, las cuales pueden ser iguales entre sí o distintas.

Por ejemplo, ¿cuáles serían las soluciones de $(x + 1)^2 = 0$?, ¿y de $(x + 1)^2 = 1$? ¿Qué sucede con $(x + 1)^2 + 1 = 0$? Analícenlo con sus compañeros y profesor.

PARA HACER

Utilicen sus cuadernos para resolver las siguientes actividades.

1. Si en un cuadrado de lado *x* aumentamos en 6 unidades dos lados paralelos, obtenemos un rectángulo. Si el área del rectángulo es 40, determinen el valor de *x*.
2. Determinen los lados de un rectángulo, sabiendo que su perímetro es 62 m y su área es 184 m.
3. El cuadrado de la edad de Carlos menos 10 es igual a 15. Escriban una ecuación que represente dicha situación. ¿Cuál es la edad de Carlos?
4. Un ciclista recorrió 60 km en un cierto número de horas. Si hubiese recorrido dos km más por hora habría tardado una hora menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuántas horas pedaleó?
5. Planteen una situación que se represente mediante la siguiente ecuación: $x^2 + x = 6$. ¿Cuánto debe valer *x*?
6. Una persona compró cierto número de objetos a 30 pesos, podría haber comprado cinco objetos más, si cada uno hubiese costado un peso menos.
   - *a*) ¿Cuántos objetos compró?
   - *b*) ¿Cuánto costó cada objeto?
7. Se requiere hacer una caja de 48 cm³ de volumen con una cartulina cuadrada. Para hacerla se cortan en las esquinas cuadrados de 3 cm de lado. ¿Cuánto mide el lado de la cartulina cuadrada?
8. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba. La distancia *d* (metros) del punto de partida en función del tiempo *t*(segundos) se determina mediante $d = 20t - 5t^2$.
   - *a*) ¿A qué altura llega luego de un segundo de haber sido lanzado?
   - *b*) Hallen los instantes en los que el objeto está a una distancia de 15 m.
   - *c*) Determinen si el objeto alcanza una altura de 25 m.
   - *d*) ¿Podrían determinar la máxima altura que alcanza el objeto? ¿En qué momento la alcanza?
9. En la siguiente sucesión de figuras los cuadraditos blancos se consideran espacios no usados, por lo que únicamente se cuentan los cuadraditos oscuros.

Posición	1	2	3	4	5
Sucesión					
Número de cuadraditos:	0	2	6	12	20...

   - *a*) Construyan una expresión algebraica que sirva para determinar el número de cuadraditos de cualquier figura de la sucesión.
   - *b*) ¿Cuántos cuadraditos tendría la figura que está en la posición 11?
   - *c*) ¿En qué posición quedaría una figura de la sucesión si tuviese 90 cuadraditos?

TIC

Para complementar y profundizar tus conocimientos, te recomendamos resolver las actividades 12, 13, 14 y 15 del Bloque II (páginas 29 y 34) de la GIS (Guía Interactiva para Secundaria): Matemáticas 3, la cual puedes consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf. (consultada en octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

En esta lección han trabajado con expresiones algebraicas, particularmente con ecuaciones cuadráticas; y analizaron distintas maneras de resolver, es decir, determinaron los valores de la incógnita para dar solución a la misma. Son varios los fenómenos o situaciones que pueden describirse con funciones cuadráticas, como la caída o el lanzamiento de una pelota desde cierta altura. Es importante que experimenten y tomen datos para modelar esta situación; por ejemplo, reúnanse con dos compañeros más, toman una pelota y déjenla caer varias veces desde una misma altura. Analicen cómo recabar los datos y lograr establecer una expresión algebraica que les permita predecir dónde se encontraría la pelota al pasar cierto tiempo; o si se conociera el tiempo, cómo se determinaría la altura en la que se halla la pelota.

LECCIÓN 1.2

En esta lección construirás figuras congruentes o semejantes como triángulos, cuadrados y rectángulos, al mismo tiempo que analizarás sus propiedades.

PARA APRENDER

Actividad 1. Una mesa triangular

Luis ayuda a su papá en la carpintería. La semana pasada atendió a Don Ramón, quien solicitó la elaboración de una mesa triangular para colocarla en una de las esquinas de su habitación; para ello, proporcionó solamente datos de la altura que debería tener (80 cm) y dos de los ángulos interiores del panel triangular correspondiente: 110° y 35°.

Con los datos entregados por Don Ramón y usando un juego geométrico o un software como el Geogebra, en equipo, analicen si es posible construir un solo triángulo, para saber si en la carpintería podrán elaborar un solo panel para la mesa.

- ¿Construyeron sólo un triángulo con esos datos? ____________________
  ¿Por qué? ____________________
- ¿Se requieren más datos? Argumenten su respuesta.
  ____
  ____

Enseguida, analicen con los integrantes de otros equipos las construcciones que realizaron. Apóyense respondiendo preguntas como las siguientes:

- ¿Qué aspectos comunes reconocen en los triángulos construidos?
  ____
- ¿Qué elementos diferentes identifican?
  ____
- ¿Son iguales (o **congruentes**) los triángulos construidos? En caso de que los triángulos presentados por varios equipos sean diferentes, ¿todos ellos tienen las medidas que pidió Don Ramón?
  ____
- ¿Son suficientes los datos para construir el panel de la mesa? ________ ¿Por qué?
  ____

Comenten sus resultados con el grupo y al final, discútanlos con su profesor.

GLOSARIO

Triángulos congruentes: dos triángulos son congruentes si tienen el mismo tamaño y la misma forma.

Actividad 2. Ampliación de un huerto rectangular (Primera parte)

El año pasado Don Ramón amplió de manera proporcional el huerto de su casa, que medía 2 m de ancho por 4 m de largo, de tal manera que el **lado homólogo** a la medida del largo, midió 6 m. Este año ha decidido hacerle una nueva ampliación, de modo que el lado homólogo al ancho incremente un tercio de la medida actual. Con esta información, en equipo, determinen qué medidas tendrá el terreno que ocupará el huerto con la nueva modificación que realizará Don Ramón. Apóyense en la siguiente tabla, escribiendo en su cuaderno los procedimientos que desarrollen.

Ampliación del huerto	Dimensiones	
	Ancho	Largo
Original	2	4
Ampliación 1		
Ampliación 2		

- Si en una tercera ampliación el huerto llega a medir 5 m de ancho, ¿cuántos metros medirá el largo? ________ ¿Por qué? ____________________
- Si se sigue el mismo patrón para ampliar el huerto, ¿cuánto medirá el ancho y el largo en una cuarta ampliación? ____________________

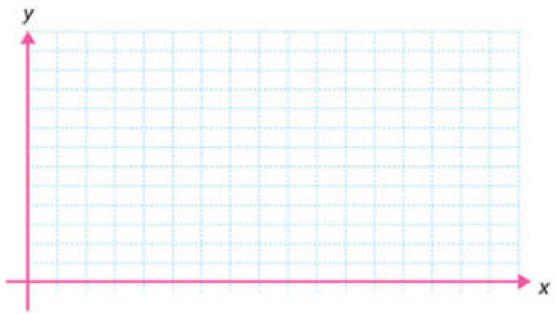
Amplien la tabla e incorporen los nuevos datos. Luego describan las estrategias utilizadas para determinar la relación entre el incremento del largo con el incremento del ancho del huerto.

GLOSARIO

Lados homólogos en polígonos semejantes o congruentes: son aquellos que ocupan la misma posición relativa, de acuerdo con la figura geométrica a considerar, siempre que sean semejantes o congruentes. Por ejemplo, si se tienen dos triángulos abc y a'b'c' semejantes o congruentes, el lado que se enfrenta al ángulo a, será homólogo al que se enfrenta al ángulo congruente en el otro triángulo, o sea a'.

Actividad 3. Ampliación de un huerto rectangular (Segunda parte)

Utilicen rectángulos para representar las medidas originales del huerto de Don Ramón, en el plano cartesiano siguiente, con sus modificaciones. Para ello, ubiquen uno de los vértices de cada rectángulo en el origen.



Con base en las representaciones realizadas sobre el plano cartesiano, analicen y expliquen:

- ¿Qué características tienen en común estos rectángulos?
- ¿Qué elementos de los rectángulos se modifican?
- ¿Por qué puede asegurarse que los lados homólogos de los rectángulos son proporcionales?
- ¿Cuál es la razón de la proporción entre los lados homólogos de los rectángulos?
- ¿Cuál es la razón de proporción entre los perímetros de los rectángulos?
- ¿Qué se puede decir de la razón de proporción entre las áreas de los rectángulos?

Describan la estrategia que siguieron para determinar la razón de la proporción entre los lados homólogos de los rectángulos, así como entre sus perímetros y sus áreas. Posteriormente, comparen sus estrategias con las desarrolladas por el resto de los equipos. Discútanlas con su profesor.

¿Sabías que?

En la obra conocida como Los Elementos de Euclides, de la época de los griegos clásicos, se encuentra un desarrollo sistemático sobre diversos temas, como el de la teoría de la proporción y el de las rectas paralelas. Si quieren saber más, pueden consultar la página del Centro virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española: http://www.divulgamat.net/ (consultada en octubre de 2013)

Actividad 4. Ampliación de un huerto rectangular (Tercera parte)

Continuen el análisis en equipo sobre los rectángulos construidos en el plano cartesiano. Tracen en cada uno la diagonal que va del vértice ubicado en el origen del plano, al opuesto. Con base en ello, expresen la razón de proporción entre las diagonales de cada rectángulo.

Ahora hagan su análisis sobre los triángulos rectángulos que tienen un lado coincidente con el eje *x*. Elijan dos triángulos y realicen lo siguiente:

a) Llamen RST a uno de los triángulos y R′S′T′ al otro.

b) Nombren como *r, s, t* a los lados del primer triángulo, y a los del segundo, *r′, s′, t′*.

Determinen la razón de la proporción entre los lados homólogos de los triángulos. Utilicen la tabla siguiente para registrar sus respuestas.

Razones entre lados homólogos		
r/r' =	s/s' =	t/t' =
r'/r' =	s'/s' =	____ = ____

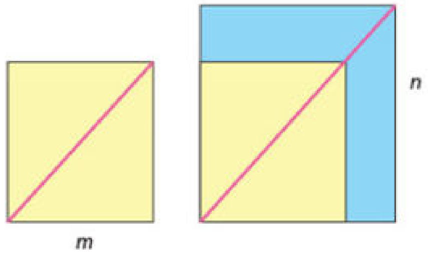
Con base en ello, analicen y expliquen:

- Además de las razones planteadas entre los lados homólogos, ¿qué otras pueden establecerse?
- ¿Por qué puede asegurarse que los lados homólogos (o correspondientes) de los triángulos son proporcionales?
- ¿Cuál es la razón de proporción entre los perímetros de los triángulos?
- ¿Qué pueden decir de la razón de proporción entre el área de los triángulos?

Discutan sus conclusiones con el resto de los equipos y validen sus resultados con su profesor.

Actividad 5. Una clase especial de rectángulos

En la figura siguiente aparecen dos cuadrados (un tipo especial de rectángulos), cuyos lados miden *m* y *n* respectivamente. Con base en lo aprendido hasta ahora, determinen la razón de proporción entre los lados de ambos cuadrados.



Enseguida, analicen y expliquen lo siguiente:

a) ¿Cuál es la razón de la proporción entre las diagonales de los cuadrados cuyos lados miden *m* y *n* cm respectivamente? ____________ ¿Por qué sucede esto?

b) ¿Cuál es la razón de la proporción entre los perímetros de los cuadrados?

c) Si *m* crece 2 cm y *n* crece 3 cm, ¿siguen siendo proporcionales los cuadrados? ____________ ¿Sus diagonales crecen también en la misma proporción? ______________________ Argumenten su respuesta.

Discutan con el resto de los equipo sus resultados y valídenlos con su profesor.

Elaboren un reporte en el que expliquen lo aprendido sobre triángulos, cuadrados y rectángulos. Planteen preguntas como las siguientes:

a) ¿Qué características comunes comparten los polígonos que construyeron? ______________________ ¿Por qué? ______________________

b) ¿Qué características no comunes reconocen? ______________________

c) ¿Los triángulos y los rectángulos comparten en lo general tanto las características comunes como las no comunes? ______________________ ¿Por qué sucede esto? ______________________

Una síntesis…

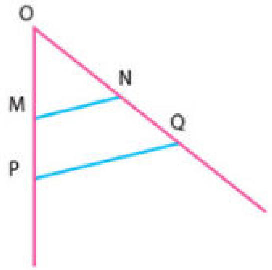
En las figuras pueden distinguirse características comunes o no comunes asociadas a su color, tamaño, forma, posición, etcétera. En esta lección, por ejemplo, se analizaron figuras geométricas que por sus características se les conoce como *semejantes* o *congruentes*. Algunas figuras semejantes conocidas son las que se trazan a escala, como los planos de construcción. ¿Qué otras figuras semejantes reconocen en su entorno? ¿Qué figuras congruentes reconocen? Describan tres ejemplos para cada caso:

Escriban ahora las propiedades esenciales que deben cumplir figuras como triángulos, cuadrados o rectángulos para que sean semejantes o congruentes:
Propiedades de figuras semejantes:

Propiedades de figuras congruentes:

Las propiedades que enunciaron, ¿son válidas para cualquier tipo de polígonos? Argumenten su respuesta.

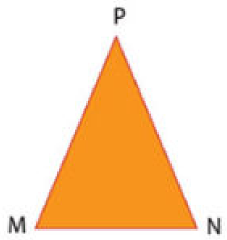
Cuando se tienen figuras que son semejantes, si se conoce la relación de proporcionalidad que existe entre ellas, es posible determinar cualquier dimensión que falte. Si en la figura siguiente se sabe que $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{PQ}$ y además, que $\overline{OM}$ = 5.1 cm, $\overline{OP}$ = 7.2 cm y $\overline{PQ}$ = 7.2 cm. ¿cuál es la magnitud de $\overline{MN}$, $\overline{ON}$, y $\overline{OQ}$?



LOS MÉTODOS

Con base en lo que aprendieron en esta lección, en equipo, tracen en su cuaderno las figuras que se piden. Describan en cada caso el método empleado, y las características comunes y no comunes entre la figura original, en relación con las que obtienen.

a) Construyan dos polígonos semejantes al triángulo MNP, de modo que la medida de las longitudes de los lados del primero midan la mitad y la del segundo, el doble. Al polígono 1 llámenle ABC y al 2, DEF.



Método para el polígono 1

Método para el polígono 2

Expresen la relación de proporción que mantienen los lados homólogos del triángulo original con los que construyeron. Utilicen la simbología adecuada.

b) Construyan un polígono que sea congruente con el rectángulo PQRS.

Método

¿Cuál es la relación de proporción que guardan los lados homólogos del polígono original con el que construyeron? Utilicen la simbología adecuada para expresarla.

PARA HACER

1. Doña Natalia desea proteger con vidrio la superficie de tres mesas de forma rectangular. Los datos que proporciona a la vidriería son los siguientes:

Mesas 1 y 2: 77 cm de largo y 34.65 m² el área que ocupan

Mesa 3: 110 cm de largo y 75 cm de ancho

Analicen la situación y contesten lo siguiente:

a) ¿Es suficiente la información para la construcción de los tres vidrios? __________ ¿Por qué? __________

b) Si su respuesta es afirmativa, planteen en su cuaderno los procedimientos que se deben llevar a cabo en la vidriería para elaborarlos. ¿Desarrollaron los mismos procedimientos en ambos casos? __________ ¿Por qué? __________

c) Dado que las mesas tienen la misma forma, ¿es posible que las diagonales de los rectángulos que forman la superficie de cada mesa coincidan? __________ Argumenten su respuesta con un dibujo.

TIC

Para complementar y profundizar tus conocimientos, te recomendamos resolver las actividades 18 y 19 del Bloque II (páginas 38 a 41) de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual puedes consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf. (consultada en octubre de 2013)

Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

2. En la clase de Matemáticas los estudiantes de tercer año elaboraron un papalote en forma de hexágono regular, cuyos lados medían 6 cm. Como tarea, el profesor pidió a cada uno de los tres equipos que integró, elaborar otro de la misma forma, con las medidas siguientes: equipo uno: 9 cm de lado, equipo dos: 12 cm de lado y equipo tres: 15 cm de lado.

a) ¿Por qué puede asegurarse que los lados homólogos de los polígonos son proporcionales? __________

b) ¿Cuál es la razón de proporción entre el primer papalote y el del equipo uno? __________ ¿Cuál entre el primero y el del equipo dos? __________ ¿Cuál entre el primero y el del tercer equipo? __________

c) Elaboren en equipo los papalotes con base en los datos proporcionados. ¿Qué características comunes comparten los papalotes? __________ ¿Qué características no comunes tienen? __________

3. En la siguiente tabla se han registrado datos asociados a las magnitudes de los lados de unos rectángulos.

	$\overline{MN}$	$\overline{OP}$	$\overline{RS}$	$\overline{TU}$
a)	x	15 m	3 m	0.45 m
b)	0.5 m	x	30 mm	1.2 dm
c)	6 dm	15 m	10 m	x
d)	8 dm	40 dm	x	6 cm

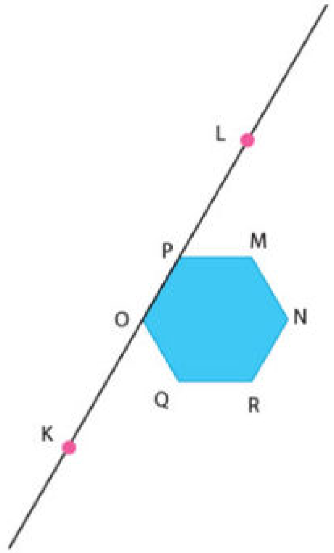
a) ¿Qué valor debe tener x, para que los lados $\overline{MN}$ y $\overline{OP}$ sean proporcionales a los lados $\overline{RS}$ y $\overline{TU}$? Determinen, justificando sus procedimientos.

____

b) ¿Qué significa que los lados $\overline{MN}$ y $\overline{OP}$ sean proporcionales a los lados $\overline{RS}$ y $\overline{TU}$?

____

4. Utilizando el punto L, construyan un hexágono regular cuyos lados midan el doble que el polígono regular OPMNRQ.



Analicen y contesten lo siguiente:

a) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre ambos polígonos?

____

b) ¿Cómo son los lados homólogos entre los dos polígonos? __________ Sus ángulos correspondientes, ¿Como son?

____

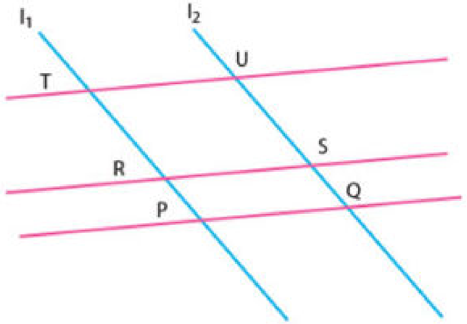
c) Unan el punto K con los demás puntos del polígono dado y con los homólogos del polígono construido. ¿Cómo son los segmentos que se obtienen? __________ ¿Por qué sucede esto?

____

d) Si a partir del hexágono OPMNRQ se construye otro cuyos lados midan el triple, ¿cuál es el factor de proporcionalidad?

____

5. En la figura $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}, \overline{RS} \parallel \overline{TU}$, determinen todas las proporciones que se establecen entre estos segmentos, sabiendo que las rectas l_1 y l_2 son paralelas.



Si se modifica la posición de las rectas l_1 y l_2, de modo que se corten en un punto, ¿se cumplen las relaciones de proporcionalidad que plantearon? ________________

¿Por qué? ____

Las propiedades que estudiaron en esta lección acerca de la semejanza y la congruencia, se refirieron a polígonos, en los que se conoce la relación que existe entre ellos. Planteen ahora si este tipo de propiedades son también válidas para figuras geométricas como circunferencias. Consideren la siguiente situación para argumentar su respuesta.

Don Ramón quiere proteger la superficie de tres mesas de forma circular con vidrio. Llamó a una vidriería y le dio como datos la medida de los radios de cada mesa: 25 cm, 30 cm y 47 cm respectivamente.

- *a*) ¿Es suficiente la información que dio Don Ramón para construir el vidrio de cada mesa? ____________________ ¿Por qué? ____________________
- *b*) Si su respuesta es afirmativa, realicen los procedimientos que se deben hacer en la vidriería para obtener los vidrios.
- *c*) Dado que las superficies de las mesas a las que les colocarán vidrio están limitadas por circunferencias de radios diferentes, ¿es posible que dos o más circunferencias de radios diferentes sean semejantes? Argumenten su respuestas usando un dibujo.

¿Son semejantes las circunferencias? ____________________ Investiguen en un libro especializado qué es la semejanza y cómo se establece. Elaboren un reporte y discútanlo con su profesor.

LECCIÓN 1.3

En esta lección aprenderás a explicitar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

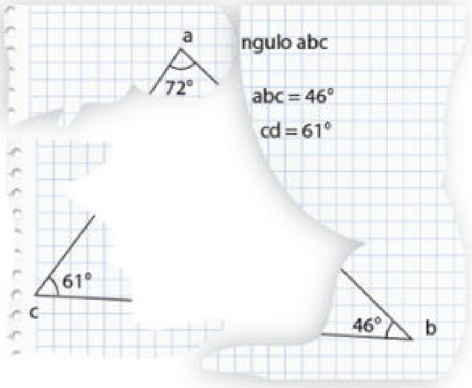
PARA APRENDER

Actividad 1. Un proyecto para la biblioteca (Primera parte)

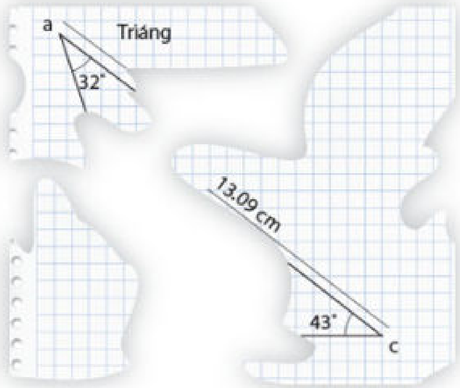
Investigando en la biblioteca de su escuela, los alumnos de tercer año encontraron unas notas deterioradas de geometría. A partir de este hallazgo, el profesor de Matemáticas les propuso realizar un proyecto grupal con el fin de restaurarlas. Para ello deben realizar un reporte técnico en el que reproduzcan fielmente las figuras geométricas triangulares que ahí se encuentran, indicando las medidas faltantes de los lados y ángulos que no aparecen (debido al desgaste que sufrió el papel por el tiempo).

Formen parte de este proyecto y pongan en juego lo que hasta ahora han aprendido sobre triángulos.

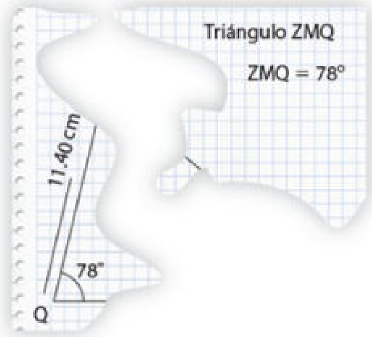
- *a*) En equipo analicen si es posible, a partir de los pedazos de notas que se tienen, construir una copia fiel de los triángulos que ahí se encontraban.
  - ¿Con qué hojas es posible realizar tal construcción? _____________ ¿Por qué? ____
  - ¿Qué tipo de triángulos estaban en las notas? __________ ¿Qué medida tenían sus lados y ángulos? ____



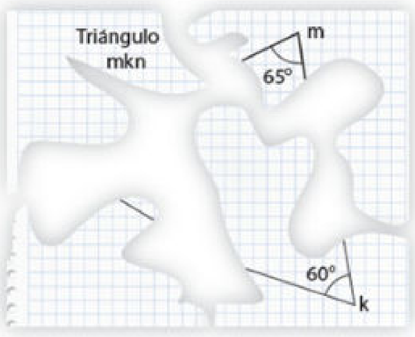
Hoja 1



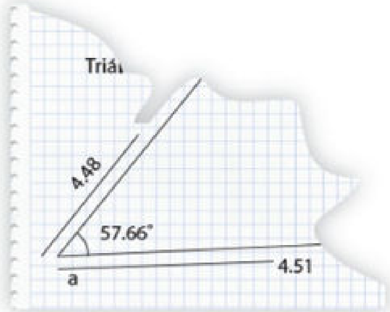
Hoja 2



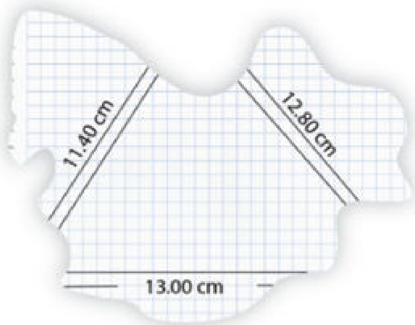
Hoja 3



Hoja 4



Hoja 5



Hoja 6

b) Describan la estrategia que utilizaron para llevar a cabo las construcciones.

Luego, analicen sus conclusiones con el resto de los equipos. Planteen preguntas como las siguientes:

- ¿Obtuvieron figuras congruentes entre los equipos? ____________ ¿Por qué? ________________
- ¿Qué información, de la que aparece en cada uno de los documentos, permite hacer copias fieles de los triángulos? ____________ Si tuvieran menos información, ¿se podrían realizar las construcciones? ____________ ¿Por qué?
- De los documentos que no permiten construir copias fieles de sus triángulos, ¿cuál es la mínima información que faltaría para reconstruirlos?

Elaboren un primer reporte de sus resultados en el que describan lo que hasta ahora han aprendido. Planteen preguntas como las siguientes:

- ¿Qué significa que dos triángulos sean congruentes?
- ¿Qué información mínima se necesita para decir que dos triángulos son congruentes? ____________

Compartan su reporte con los demás equipos.

Actividad 2. Un proyecto para la biblioteca (Segunda parte)

Para hacer uso de la experiencia adquirida en la restauración y verificar las conclusiones de los equipos, el profesor de matemáticas organizó el siguiente juego:

Cada equipo deberá construir en secreto un triángulo cualquiera, utilizando regla y compás. Enseguida redactarán tres mensajes distintos; en cada uno se deberá anotar un solo dato del triángulo construido, a fin de que otros equipos dibujen, con los mismos instrumentos de medición, un triángulo congruente a éste. Perderá el equipo que proporcione datos inútiles para la construcción de un triángulo congruente.

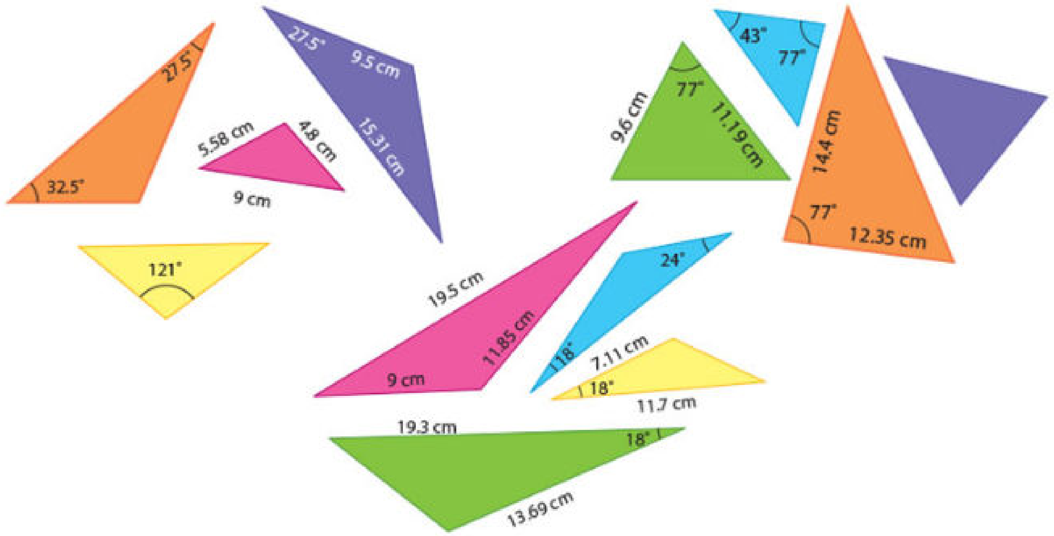
Incorpórense al juego para concluir el proyecto de restauración. Al final respondan los cuestionamientos siguientes:

- ¿Cuáles son los casos que garantizan la construcción de un triángulo congruente a otro dado y que permiten ganar el juego? ________________________
- ¿Funcionan para cualquier tipo de triángulo? ________________ ¿Por qué? ________________

Revisen su primer reporte, si es necesario reformulen sus respuestas y conclusiones, indicando y justificando cuántos y cuáles son los casos que permiten la construcción de triángulos congruentes, a partir de cierta información mínima.

Actividad 3. Misma forma, diferente tamaño

Con el propósito de profundizar en el estudio de las relaciones matemáticas que se establecen entre lados o ángulos de los triángulos, el profesor propuso a sus estudiantes identificar, sin usar regla, cuáles de los siguientes triángulos son semejantes.



Respondan en equipo lo siguiente:

a) ¿Qué significa que dos o más triángulos sean semejantes? ________________________

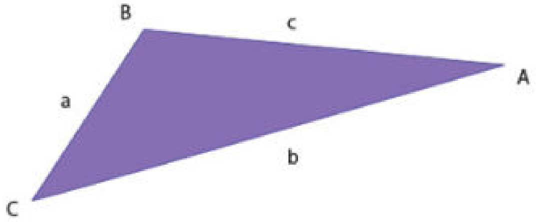
b) ¿Son todos los triángulos de cada grupo semejantes entre sí? ____________ ¿Por qué? ____________

c) ¿Qué información contienen los triángulos que sí lo son? ____________ Si se tuviese menos información en cada uno de los triángulos, ¿se podría llegar a la misma conclusión? ____________

¿Por qué? ____

d) Analicen en equipo cuál es la mínima información que se necesita conocer de un triángulo para garantizar su semejanza con otro dado.

Para verificar sus conclusiones hagan lo siguiente: con la información que se proporcionada en cada línea de la tabla construyan, de ser posible, un triángulo que *no* sea semejante al triángulo 1. Anoten en cada espacio el dato que se pide y en la última columna una breve explicación de por qué sí o por qué no se pudo realizar tal construcción.



Triángulo	a	b	c	$\measuredangle A$	$\measuredangle B$	$\measuredangle C$	¿Es posible construir un triángulo semejante al triángulo 1? ¿Por qué?
1	5	8.6	6.2	35°	100°	45°	
2	7.5	12.9	9.3				
3	7.5	12.9			100°		
4				35°		45°	
5	7.5	12.9		35°			
6		12.9	9.3	35°			
7	7.5				100°		
8	7.5	12.9				45°	
9			9.3			45°	
10	7.5		9.3				

e) Con base en sus respuestas, ¿cuántos y cuáles son los casos que garantizan la semejanza de dos o más triángulos dada cierta información?

____

Comparen sus resultados con los demás equipos. ¿Obtuvieron las mismas conclusiones? ________ ¿Por qué? ____________________ Validen sus respuestas con el profesor.

Una síntesis...

En las actividades anteriores reconocieron cuál es la información mínima requerida para determinar cuándo dos o más triángulos son congruentes y cuándo son semejantes entre sí. Es decir, se determinaron los criterios necesarios y suficientes para establecer relaciones de congruencia y semejanza de dos o más triángulos.

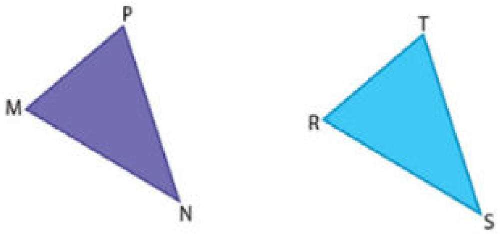
Congruencia de triángulos

Dos triángulos son *congruentes* si tienen la misma forma y el mismo tamaño. En términos de los elementos que constituyen a un triángulo (lados y ángulos), para determinar la congruencia entre dos triángulos se conocen tres criterios:

a) Dos triángulos son congruentes si sus tres lados son iguales.

En los triángulos Δ MNP y Δ RST, se tiene que:

$$\left.\begin{aligned}\overline{MP} &= \overline{RT}\\ \overline{MP} &= \overline{RS}\\ \overline{MP} &= \overline{ST}\end{aligned}\right\}\quad \text{Entonces, } \Delta\, MNP \cong \Delta\, RST$$

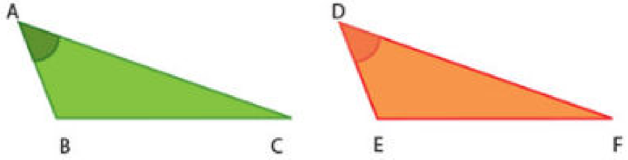


A este criterio se le conoce como "*lado, lado, lado*" y de forma abreviada, como criterio LLL.

b) Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son iguales.

En los triángulos ΔABC y Δ DEF, se tiene que:

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{DE}\\ \measuredangle\, BAC &= \measuredangle\, EDF\\ \overline{AC} &= \overline{DF}\end{aligned}\right\}\quad \text{Entonces, } \Delta ABC \cong \Delta\, DEF$$

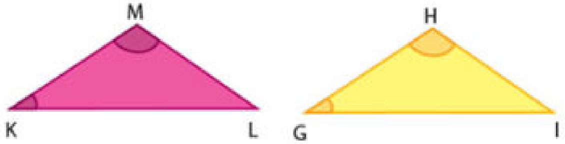


A este criterio se le conoce como "*lado, ángulo, lado*" y de forma abreviada, como criterio LAL.

c) Dos triángulos son congruentes si un lado y los ángulos adyacentes a ese lado son iguales.

En los triángulos Δ KML y Δ GHI, se tiene que:

$$\left.\begin{aligned}\measuredangle\, LKM &= \measuredangle\, IGH\\ \overline{KM} &= \overline{GH}\\ \measuredangle\, KML &= \measuredangle\, GHI\end{aligned}\right\}\quad \text{Entonces, } \Delta\, KML \cong \Delta\, GHI$$



A este criterio se le conoce como "*ángulo, lado, ángulo*" y de forma abreviada, como criterio ALA.

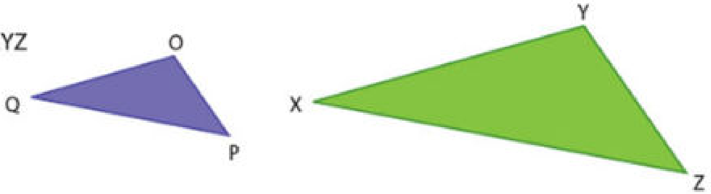
Semejanza de triángulos

Dos triángulos son *semejantes* si tienen sus ángulos respectivos iguales y si sus lados homólogos (sus lados correspondientes) son proporcionales. Para determinar si dos triángulos son semejantes, existen tres criterios:

a) Si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, entonces son semejantes.

En los triángulos Δ *QOP* y Δ XYZ se tiene que:

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{XZ}} - \frac{\overline{PO}}{\overline{ZY}} - \frac{\overline{OQ}}{\overline{YX}}\quad \text{Entonces, } \Delta\, QOP \approx \Delta\, XYZ$$

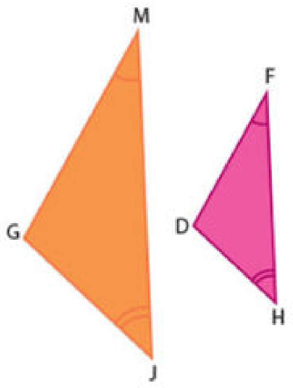


A este criterio se le conoce como "*lado, lado, lado*" y de forma abreviada como criterio LLL.

b) Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces son semejantes.

En los triángulos Δ JMG y Δ HFD se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle GJM = \measuredangle DHF\\ \\ \measuredangle JMG = \measuredangle HFD\end{array}\right\}\ \text{Entonces, } \Delta JMG \approx \Delta HFD$$

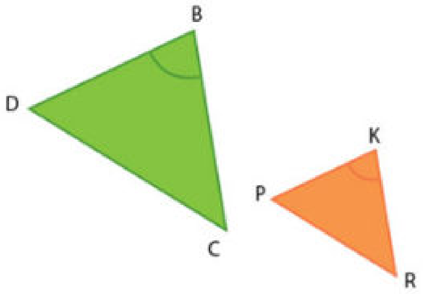


A este criterio se le conoce como "*ángulo, ángulo*" y de forma abreviada como criterio AAA.

c) Si dos triángulos tienen un ángulo de igual magnitud comprendido entre lados proporcionales, entonces son semejantes.

En los triángulos Δ DBC y Δ PKR se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overline{DB}}{\overline{PK}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{KR}}\\ \measuredangle DBC = \measuredangle PKR\end{array}\right\}\ \text{Entonces, } \Delta DBC \approx \Delta PKR$$



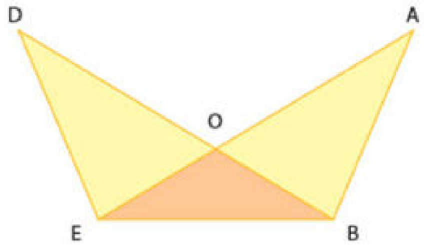
A este criterio se le conoce como "*lado, ángulo, lado*" y de forma abreviada como criterio LAL.

LOS MÉTODOS

Congruencia

Para determinar la congruencia de dos o más triángulos, resulta esencial reconocer en ellos el cumplimiento de alguno de los criterios aprendidos a lo largo de esta lección. En ocasiones, para determinar si estos criterios se cumplen o no, es necesario valerse de otros conocimientos, como los ángulos entre paralelas o la suma de ángulos interiores de un triángulo.

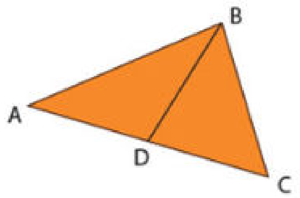
En equipo, escriban junto a las siguientes figuras el criterio que valida la congruencia de triángulos, argumentando en cada caso su elección.



Si $\angle OEB \cong \angle OBE$ y $\angle DEB \cong \angle ABE$
¿Por qué $\Delta DEB \cong \Delta ABE$

____
____
____
____
____
____

Criterio de congruencia considerado:
____



ABC es un triángulo isósceles y $\angle ABD \cong \angle CBD$
¿Por qué $\Delta ABD \cong \Delta DBC$?

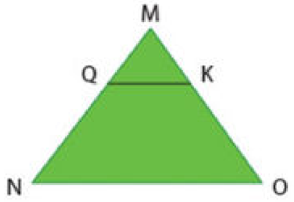
____
____
____

Criterio de congruencia considerado:
____

Semejanza

Al igual que sucede con la congruencia, para determinar la semejanza de dos o más triángulos, es importante que se satisfaga alguno de los criterios estudiados en esta lección. Sin embargo, dicho criterio pudiera utilizar otras propiedades geométricas, como la proporcionalidad o los ángulos entre rectas paralelas.

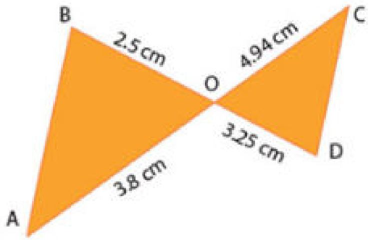
Escriban junto a las siguientes figuras el criterio que valida la semejanza de triángulos, argumentando en cada caso la elección.



En el triángulo *NMO*, $\overline{QK} \parallel \overline{NO}$
¿Por qué $\Delta NMO \sim \Delta QMK$?

____
____
____

Criterio de semejanza considerado:
____



¿Por qué $\Delta ABO \sim \Delta DCO$?

____
____
____

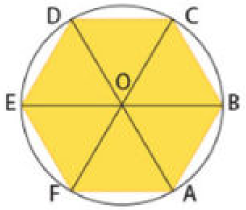
Criterio de semejanza considerado:
____

PARA HACER

1. De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas? Argumenten en su cuaderno sus respuestas.

- *a*) Todos los triángulos equiláteros son congruentes. ____
- *b*) Se puede decir que dos triángulos rectángulos son semejantes si se sabe que uno de sus ángulos agudos son iguales entre sí. ____
- *c*) Todos los triángulos equiláteros son semejantes. ____
- *d*) En triángulos congruentes, se oponen lados iguales a ángulos iguales. ____
- *e*) Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados homólogos proporcionales y si el ángulo opuesto al mayor de estos lados es igual. ____

2. Consideren el siguiente hexágono regular inscrito en la circunferencia con centro *O*. Proporcionen argumentos que justifiquen las siguientes afirmaciones.



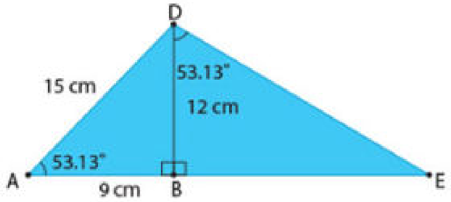
$\Delta FOA \cong \Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta COD \cong \Delta DOE \cong \Delta EOF$

____

TIC

Para complementar y profundizar tus conocimientos, te recomendamos resolver la actividad 20 del Bloque II (páginas 43 y 44) de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual puedes consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf. (consultada en octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

3. Consideren el triángulo rectángulo ADE.



a) Argumenten por qué $\Delta ABD \sim \Delta BDE \sim \Delta ADE$

____

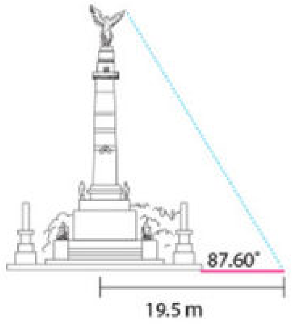
____

b) ¿Cuál es la medida del perímetro y el área del triángulo ADE?

____

4. Emilio estaba interesado en conocer la altura aproximada del monumento a la Independencia ubicado en la Ciudad de México. Para esto realizó el siguiente procedimiento:

- Midió con una cinta métrica la sombra que el monumento proyectaba a las 10 de la mañana, obteniendo una medida de 19.5 m.
- A la misma hora midió la sombra de un palo de escoba de 1.20 m, obteniendo una medida de 52 cm.
- Por último, Emilio midió con un transportador el ángulo entre la sombra del monumento y una línea imaginaria que va de la punta del monumento hasta el final de la sombra (como se ve en la figura), obteniendo una medida de 87.60°. Lo mismo hizo con el palo de escoba y obtuvo el mismo resultado.



¿Le será útil este procedimiento a Emilio para obtener la altura aproximada del monumento a la Independencia? ______________ ¿Por qué? ______________ De ser así, ¿cuál es esta medida? ______________________________

En esta lección establecieron los criterios necesarios y suficientes para determinar cuando dos o más triángulos son congruentes o semejantes entre sí. Asimismo, se vio que la identificación de tales criterios requiere, en muchas ocasiones, poner en funcionamiento algunos conocimientos previos sobre los triángulos y otras propiedades geométricas relacionadas con éstos.

Sin duda, una aplicación importante de estos criterios en la vida real se da al querer medir una distancia en la que ésta es parte de un conjunto de medidas que forman un triángulo rectángulo. Por ejemplo, recuerden el problema 4 de la sección "Para hacer".

En equipo y tomando en cuenta lo aprendido en esta lección, desarrollen una estrategia para medir el edificio o árbol más alto de su escuela o comunidad. ¿Cuál fue la estrategia empleada? Compartan sus resultados con sus compañeros.

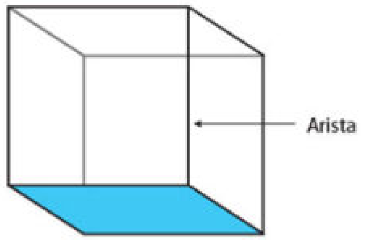
LECCIÓN 1.4

En esta lección realizarás un análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación e identificarás las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

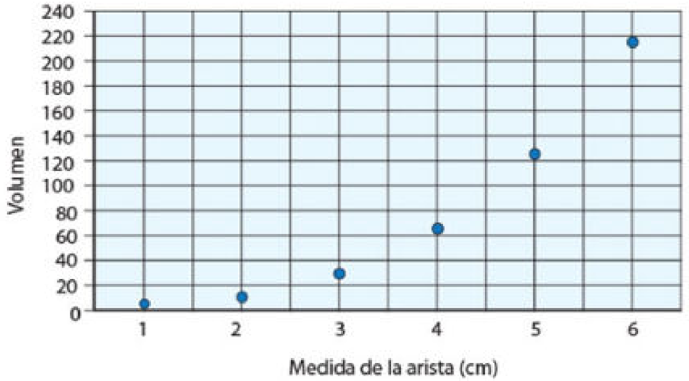
PARA APRENDER

Actividad 1. Cómo variar las aristas

El *cubo* es un sólido regular limitado por seis cuadrados iguales y cuyos lados se conocen como aristas.



La siguiente gráfica representa la relación entre el volumen de un cubo y la medida de su arista.



De acuerdo con la información de la gráfica respondan lo siguiente:

a) Si el volumen del cubo es de 27 cm², ¿cuánto mide su arista? ____________________

b) Si la arista mide 1 cm, ¿cuál es el volumen del cubo? __________ ¿Esta información la proporciona la gráfica? __________ Justifiquen su respuesta. ___________

c) Si el volumen del cubo es de 512 cm², ¿cuál es la medida de su arista?, ¿qué estrategia emplearon para obtener este resultado? Comenten con sus compañeros las estrategias que emplearon, ¿Fueron las mismas? __________, ¿cuáles serían más eficientes? ______________________________________

d) Escriban una expresión algebraica para obtener la medida de la arista del cubo a partir de su volumen. ______________________________________

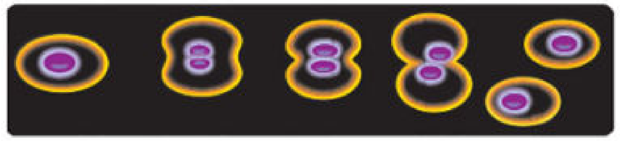
e) Escriban una expresión algebraica para obtener el volumen del cubo a partir de la medida de su arista.

f) ¿La relación entre el volumen del cubo y la medida de su arista es de proporcionalidad? ______________ En caso de que lo sea, ¿qué tipo de proporcionalidad es? ______________________________________

Comenten en grupo, y con la ayuda de tu profesor, si la estrategia para obtener el resultado del inciso c) está relacionada con la respuesta dada en *d*) y *e*). Si las estrategias están relacionadas, describan de qué manera se relacionan. En caso contrario, expliquen sus razones.

Actividad 2. Un cultivo de bacterias

Gran parte de las bacterias se reproducen por un proceso de división celular llamado *fisión binaria*, como se muestra en la figura.



Bajo condiciones ideales, una bacteria se puede dividir una vez cada 20 min. Si se iniciara un cultivo con una bacteria, al término de una hora habría ocho bacterias.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo después de 24 h? Pueden ayudarse con la calculadora y la siguiente tabla.

Tiempo	Número de bacterias
0 min	1
20 min	2
40 min	4
60 min	
100 min	
3 h	
.	
.	
.	
24 h	

b) ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo a los 30 min? ______________________

c) Si en una hora hay ocho bacterias, en tres horas tendremos 24 bacterias, ¿es correcta esta afirmación? ______, ¿por qué? ______________________

d) Sabemos que conforme se incrementa el tiempo también las bacterias aumentan, ¿entonces esta relación es de proporcionalidad? _____, ¿por qué? ____________

____

El crecimiento de las bacterias también se puede representar a mediante de una expresión algebraica.

e) ¿Qué expresión algebraica utilizarían para esta situación y por qué?

____

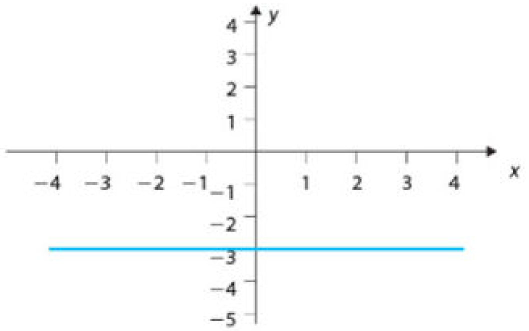
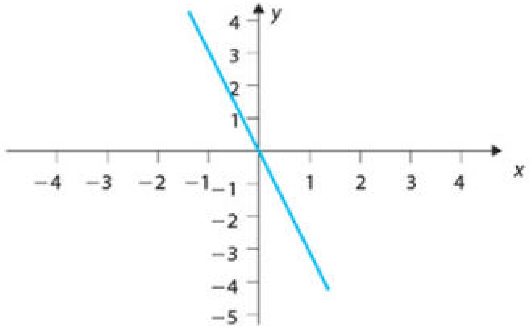
f) ¿Qué es lo que está variando en esta expresión algebraica?

____

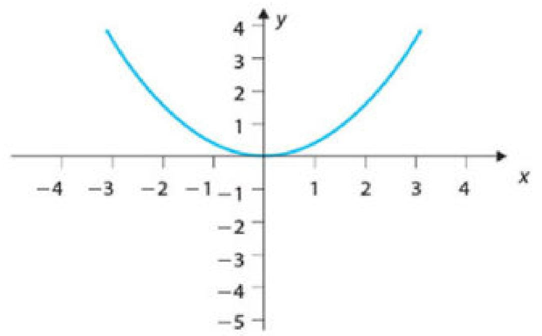
Reúnanse con su profesor y comenten cuántas y cuáles maneras de representar esta situación de crecimiento de bacterias se utilizaron en esta actividad.

Actividad 3. Encuentra la relación

Relacionen en equipo cada gráfica con su correspondiente representación algebraica y tabular. Completen los datos de las tablas y grafiquen las funciones que falten.

<table>
<tr><th>Representación gráfica</th><th>Representación algebraica</th><th>Representación tabular</th></tr>
<tr><td>a)

</td><td>$y = \sqrt{x}$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>−3</td><td>9</td></tr><tr><td>−2</td><td></td></tr><tr><td>−0.5</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>−6</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>b)

</td><td>$y =$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>9</td><td></td></tr><tr><td>16</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
</table>

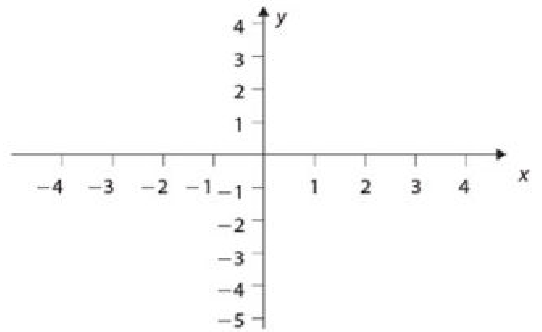
c)



$y = \frac{1}{3}x$

y	x
	$-\frac{1}{3}$
	−3
	0
	3
−3	0.3

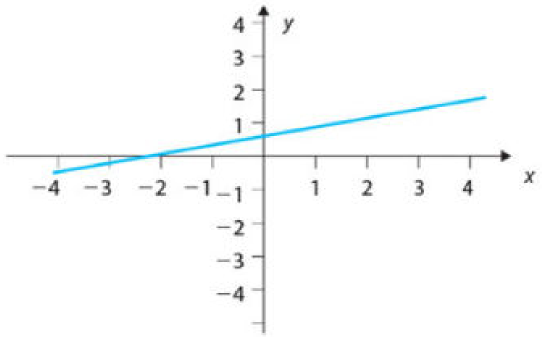
d)



$y =$

y	x
3	3
$\frac{1}{3}$	
0	0
3	−3

e)



$y = \frac{1}{3}x^2$

x	y
−6	−2
−1.5	
0	0
$\frac{3}{2}$	
9	3

En esta actividad representaron la relación entre dos variables de tres maneras diferentes. Usen estas formas para responder en cada uno de los cinco casos: ¿expresa una relación de proporcionalidad? ________________ Justifiquen su respuesta.

____

Una síntesis...

En estas actividades conocieron diferentes maneras de representar una misma situación que expresa la relación entre cualesquiera dos cantidades variables (gráfica, algebraica y tabular).

La información que da cada una de las representaciones favorece o enfoca cierta característica. Por ejemplo, la representación tabular es conveniente cuando se necesita obtener datos precisos, mientras que la representación gráfica permite tener un panorama más cualitativo del comportamiento de la relación, en tanto que la representación algebraica es eficaz cuando se desean tener generalizaciones o patrones.

LOS MÉTODOS

Como vimos a lo largo de la lección, hay diferentes maneras en que podemos representar la relación entre dos cantidades variables cualesquiera, de acuerdo con el tipo de información que se necesite. Dos ejemplos son, el precio de un producto en relación con la cantidad de productos vendidos, o el peso de los compañeros de clase. Se representarán esas dos situaciones en tablas de valores:

Variable 1	Variable 2
5	1
10	2
40	8
70	14
80	16
95	19

Tabla I

Variable 1	Variable 2
1	61
2	66
3	52
4	59
5	55
6	50

Tabla II

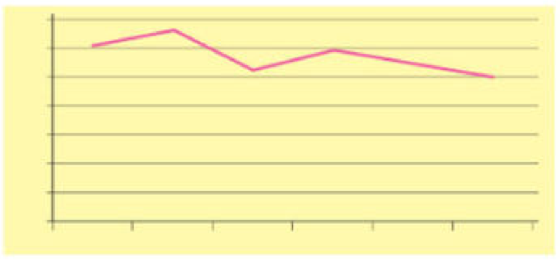
¿Cuál de las dos tablas representa la situación que relaciona a los estudiantes de la clase con su peso? _______________________________________

¿Cómo lo determinaron?

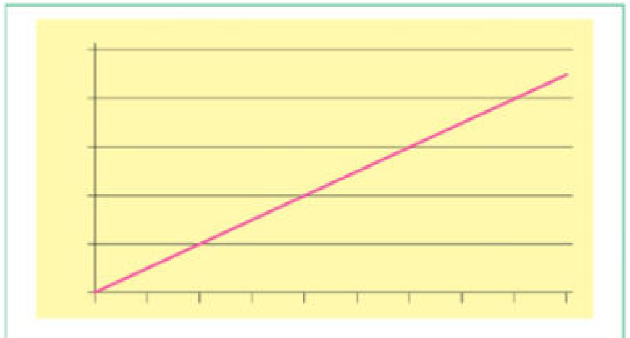
____

____

Si representamos gráficamente las mismas situaciones, quedarían de la siguiente forma:



Gráfica I



Gráfica II

TIC

Para complementar y profundizar tus conocimientos, te recomendamos resolver las actividades 26 y 27 del Bloque III (páginas 58 a 62) de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual puedes consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf. Reflexionen si las situaciones presentadas son de proporción y, en caso afirmativo, si son de proporción directa o inversa (consultada en octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

¿Qué situación representa la gráfica I y cuál, la gráfica II? ______________________

____

¿Qué estrategia emplearon? ______________________________________

____

En caso de que quisiéramos la representación algebraica de cada una de estas situaciones, ¿cuáles serían?

____

¿Se puede obtener la expresión algebraica de ambas situaciones, por qué?

____

____

____

Entonces, tenemos diferentes maneras en que podemos representar una misma situación. Ejemplifiquen cuáles: ____________________________. ¿Consideran que lo verbal pueda ser una representación? ________ Elijan una situación de las trabajadas en la lección, ¿cuál sería su representación verbal? ______________ Comportan sus resultados con sus compañeros.

PARA HACER

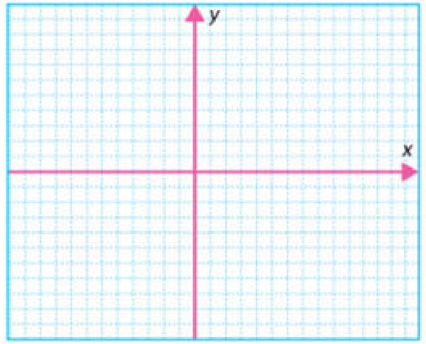
1. Una persona compró cierto número de objetos a 30 pesos, podría haber comprado cinco objetos más si cada uno hubiese costado un peso menos.
   a) ¿Cuántos objetos compró? ______________________________
   b) ¿Cuánto costó cada objeto? ______________________________
   ¿Qué tipo de representación emplearon para resolver el problema?, ¿qué otro tipo de representación podría emplearse?, ¿varía el resultado?, ¿por qué? ____________
   ____
2. Enseguida se muestra una lista de expresiones que se representan gráficamente como líneas rectas; grafíquenlas en el sistema coordenado.

$y = 2x + 2$

$y = -\frac{1}{2}x - 2$

$y = -3x - 2$

$y = \frac{1}{3}x + 3$



3. Encuentren las expresiones algebraicas que determinan las siguientes rectas y grafíquenlas.
   a) Una recta de pendiente dos que pasa por el punto (3, 4).
   b) Una recta que pasa por los puntos (18.1, 3) y (1.2, 23.2)
   c) Determinen los puntos de intersección entre estas dos rectas.

Sabemos que existen diferentes maneras de representar una misma situación. Podemos emplear una representación algebraica, una representación gráfica, tabular y hasta podríamos expresarla de manera verbal. Pero, ¿qué ventajas y desventajas tiene cada una de estas representaciones? Formen equipos e investiguen lo siguiente: ¿para qué nos sirven estas representaciones? Elijan información o datos que les interesen y reflexionen sobre el tipo de representación que más convenga, de acuerdo con los datos que se desean obtener.

LECCIÓN 1.5

En esta lección aprenderás a representar de manera tabular y algebraica las relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

¿Sabías que?

En el siglo XVII, Galileo Galilei fue de los primeros en afirmar que todos los objetos caen con aceleración uniforme sin importar su masa. En su libro *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, publicado en 1638, afirma que un cuerpo en caída libre está uniformemente acelerado; es decir, que partiendo del reposo adquiere incrementos iguales de velocidad en iguales intervalos de tiempo. El mismo Galileo encontró, con experimentos usando planos inclinados, que "en el movimiento uniformemente acelerado, partiendo del reposo, la distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo invertido en el descenso".

PARA APRENDER

Actividad 1. Todo lo que sube, baja

La primera lección terminó preguntando cómo sería una expresión algebraica que permitiera predecir dónde se encontraría la pelota al pasar cierto tiempo, o si conociendo el tiempo transcurrido, podrían determinar la altura a la que se halla la pelota. Ahora se verá cómo hacerlo...

Para los cuerpos lanzados hacia arriba, la fórmula que permite determinar la altura de la pelota (medida en metros), denominada con la letra h, en términos de la velocidad inicial con que es lanzada (v_o) y el tiempo transcurrido, t (medido en segundos) es:

$$h = v_0 t - 4.9t^2$$

Si una pelota se lanzó al aire con una velocidad de 25 m/s:

a) ¿Cómo escribirían la expresión algebraica que represente la altura de la pelota, h, en función del tiempo transcurrido, t? ______________________________

b) ¿Al cabo de cuántos segundos se encontrará la pelota a 20 m de altura? Argumenten su respuesta. ______________________________

c) Formen un equipo de tres compañeros y lancen una pelota hacia arriba. Como podrán ver, pasa dos veces por el mismo lugar. Una cuando sube y otra cuando baja. Entonces, ¿en qué momentos, el objeto que fue lanzado a 25 m/s pasa por los 30 m de altura? Para ayudarse, pueden completar la siguiente tabla:

t	$h = 25 \text{ m/s } t - 4.9t^2$
0	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	
4.5	
5	

d) Ahora que observaron que puede pasar dos veces por la misma posición, ¿consideraron esta característica de las variaciones cuadráticas en la pregunta *b*)? Si no lo hicieron, respondan: ¿al cabo de cuántos segundos se encontrará la pelota a 20 m de altura? Nuevamente argumenten su respuesta.

____

e) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? Comenten con sus compañeros las maneras que usaron para encontrar dicha altura. ¿Cómo pueden asegurar, con ayuda de la tabla, que la altura máxima es la que dijeron? ______________

f) ¿En qué momento la pelota llega nuevamente al piso? Argumenten sus respuestas.

____

Actividad 2. La temperatura

Se midió la temperatura (dada en °C) de una sustancia durante siete horas y se determinó que la función que representa dicha temperatura T, en función del tiempo transcurrido en horas t, está dada por la siguiente expresión algebraica:

$$T = -\frac{5}{16}(t-2)(t-8)$$

a) ¿Cómo quedaría expresada la temperatura en función del tiempo al resolver el producto? Recuerden lo trabajado en años anteriores de productos notables.

____

b) ¿Cuál fue la temperatura inicial de la sustancia? ______________________________

c) ¿Qué estrategias usaron para encontrarla? Comenten con sus compañeros las distintas estrategias y, en grupo, expongan cómo lo resolvió cada quien.

d) ¿Qué características tiene el valor hallado? ______________________________

e) ¿La sustancia estaba fría, templada o caliente? ______________________________

f) Si se hablara de altura, ¿podría haberse dado ese mismo valor como la altura inicial? ¿Cuán importante es el contexto en la situación? Reflexionen en grupo la respuesta. ______________

____

g) ¿En qué momento la temperatura fue de 0 °C? ¿Cuál fue la temperatura máxima a la que llegó la sustancia y en qué tiempo la alcanzó? ¿Cómo podrían comprobarlo? Justifiquen sus respuestas.

____

h) ¿Qué temperatura tenía al terminar el experimento? Sabiendo que la temperatura ambiente oscila entre los 20 y 25 °C, ¿podría la sustancia haber llegado a esta temperatura? Comenten con sus compañeros y justifiquen sus respuestas.

____

Actividad 3. ¿Cómo crecen las ratas?

Sabemos que las ratas se utilizan para realizar experimentos científicos y que la alimentación es algo que debe cuidarse para mantenerlas en buen estado. Para ello, se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje p de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata, denominado por w, en un periodo determinado se expresa a través de la siguiente función:

$$w = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$$

a) ¿Cuál es el máximo peso ganado? ______________________________

b) ¿Qué significa el valor 20 en la expresión? Comenten con sus compañeros la respuesta. ______________________________

TIC

Actividad retomada de: http://es.scribd.com/doc/36901537/Aplicacion-de-Funciones-Cuadraticas (consultada 1 de abril de 2013) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Considerando las distintas situaciones analizadas hasta el momento, ¿qué características tienen las relaciones de variación cuadrática? Por ejemplo, ¿cómo es el comportamiento de sus magnitudes? ¿Siempre aumentan? ¿Existen valores iguales para las abscisas? Comenten con el grupo las distintas características descubiertas y escríbanlas en su cuaderno.

Una síntesis…

En diversas situaciones hay siempre *elementos* que cambian. Esos *elementos* cambiantes (la distancia, la velocidad, el número de diagonales, el tiempo, la temperatura, la población y el volumen) pueden medirse y suele llamárseles *magnitudes variables*. Como han podido observar en las actividades de esta lección, las relaciones entre las variables se expresan de diversas formas. ¿Cuáles son? ¿Qué características tiene cada una de ellas? Si quisieran encontrar un valor particular, ¿cuál es el más conveniente? ¿Y si quisieran expresar de una vez todas las posibilidades? Comenten en grupo las respuestas.

LOS MÉTODOS

En la Actividad 1, *Todo lo que sube, baja*, se preguntó al cabo de cuánto tiempo pasa la pelota por una altura determinada. ¿Qué característica deben considerar de las relaciones cuadráticas para contestar esta pregunta? ¿Cómo les ayudó la representación tabular para responder estas preguntas? Comenten con el grupo sus respuestas y completen con ellos el siguiente cuadro:

La representación tabular proporciona la siguiente información:

Las relaciones cuadráticas tienen distintas maneras de representar la información. ¿Cuál es la expresión general de una relación de variación cuadrática? Pueden consultar la Lección 1.1 de este bloque para ayudarse.

Expresión algebraica general de una relación de variación cuadrática:

PARA HACER

1. Una empresa papelera mayorista comprueba que la ganancia (en miles de pesos) obtenida por cierta cantidad de cajas de lápices, expresada en "cientos de cajas", está dada por la función: $I = -x^2 + 7x - 8$, y la ganancia (también en miles de pesos) que proporciona cierta cantidad de cajas de cuadernos, también expresada en "cientos de cajas", está dada por $C = 2x - 4$.
   - *a*) ¿Qué representa la x en la expresión algebraica? ________________________
   - *b*) ¿Qué cantidad de cajas de ambos útiles se debe vender para obtener la misma ganancia? Comenten con sus compañeros las estrategias utilizadas.
   ____
   - *c*) Dado que la compañía papelera recibe todas las semanas cajas de lápices, si no se venden los lápices y se acumulan en el depósito, se dice que "la venta de lápices da pérdida", pues se debe pagar a otro depósito para que guarde las nuevas cajas. Entonces, ¿cuándo empieza a generar pérdidas la venta de lápices? Y la de cuadernos, ¿en algún momento da pérdida? ¿Por qué ocurre esto? (la cantidad se expresa en cientos de lápices). Justifiquen ampliamente su respuesta. Para ello, recuerden las características de la función afín que vieron en otros cursos.

2. Se deja caer una moneda desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. Sabiendo que la fórmula que representa el movimiento de caída libre es: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ en donde $g = 9.8$ m/s²:
   - *a*) ¿Cuál es la velocidad inicial, v_0, con la que se lanza la moneda si está en las manos de una persona? ________________________
   - *b*) ¿En cuánto tiempo recorre la mitad de su altura? ________________________
   - *c*) ¿A qué altura, respecto al piso, se encuentra a los 3 s de haberse soltado?
   ____

3. Los ingresos mensuales, en pesos, de un fabricante de zapatos están dados por la función $I = 1\,000z - 2z^2$, siendo z la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes.
   - *a*) Completen la tabla de valores:

z	$I(z)$
50	
90	
	80 000
150	
	120 000
230	
	124 800
250	
260	
	120 000
350	

   - *b*) ¿Qué cantidad de pares de zapatos debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso? Argumenten su respuesta. ________________________
   - *c*) ¿Qué ingresos obtiene si fabrica 125 pares de zapatos? ¿Y si hace 375 pares?
   - *d*) ¿A partir de qué cantidad de pares comienza a tener pérdidas? ¿Por qué consideran que esto es posible? Comenten con sus compañeros las respuestas y entre todos construyan una argumentación considerando todas sus observaciones. ________________________

En esta lección aprendieron a representar de manera tabular y algebraica las relaciones de variación cuadrática identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. De manera grupal comenten y anoten en sus cuadernos cuáles son las ventajas de representar las relaciones de manera tabular y algebraica. ¿Cuál de ellas les resultó más compleja? ¿Por qué? Comenten con sus compañeros las dudas surgidas en esta lección y entre todos, con ayuda del profesor, resuélvanlas.

Sabiendo que la aceleración gravitacional es aproximadamente 9.8 m/s², ¿cómo expresarías de manera algebraica la fórmula que permite calcular la distancia d recorrida en términos del tiempo transcurrido t? Comenta con tu profesor de Física este nuevo aprendizaje, pues se relaciona estrechamente con los temas que se tratarán en clase.

LECCIÓN 1.6

En esta lección aprenderás sobre la escala de la probabilidad. Analizarás las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

PARA APRENDER

Actividad 1. La preparación de la fiesta de fin de curso

Para festejar el fin de curso de la secundaria, los estudiantes de tercer año averiguaron en varias taquerías cuáles eran las promociones para hacer una taquiza. Entre todos deben decidir la mejor opción entre todas las distintas alternativas que encontraron:

Taquizas Guadalajara

Precio: $28 por persona

Incluye: ocho guisos, quesadillas, tortillas, barra de guarniciones, salsas. En este caso incluye ensalada, agua de sabor y botana, postre, y refresco en dos presentaciones: tradicional y de dieta.

Taquizas Toño

Precio: $28 por persona

Incluye: ocho guisos, guarniciones, salsas, quesadillas, botana, agua de sabor, platos desechables y su tortilla recién hecha, personal uniformado, presentación formal. Incluye barra de ensaladas y condimentos. Pregunte por nuestras promociones con ensalada y postre. Menores de 10 años al 2 × 1, se aplican restricciones.

Taquizas pa´ ti

Precio: $33 por persona

Incluye: 10 guisos, quesadillas, tortillas, salsas, bocadillos, guarniciones, agua de sabor, tres variedades de postres, mantelería básica y recepción, presentación de lujo. Incluye barra de ensaladas y condimentos.

Santiago, uno de los estudiantes, comenta que cualquiera da igual y, por lo tanto, es conveniente elegir entre los primeros dos, pues son más económicos. Sin embargo, Natalia les dice: "No da igual, no todos ofrecen el mismo servicio".

- ¿Cuáles son las diferencias a las que se refiere Natalia? Comenten con sus compañeros las respuestas.

José propone que en vez de ver qué ofrecen las taquizas, armen un listado de las cosas que ellos quieren para su fiesta. Así que se arman grupos y comienzan a hacer propuestas de las cosas indispensables. De esta plática grupal resultaron tres propuestas:

Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3
A lo más 10 guisados	Ocho guisados	A lo más 10 guisados
Guarniciones	Guarniciones	Guarniciones
Tortillas	Tortillas	Tortillas
Salsas	Salsas	Salsas
Agua de sabor	Agua de sabor	Agua de sabor
Bocadillos	Botana	Presentación de lujo
Ensalada	Refresco	Ensalada
Botana	Ensalada	

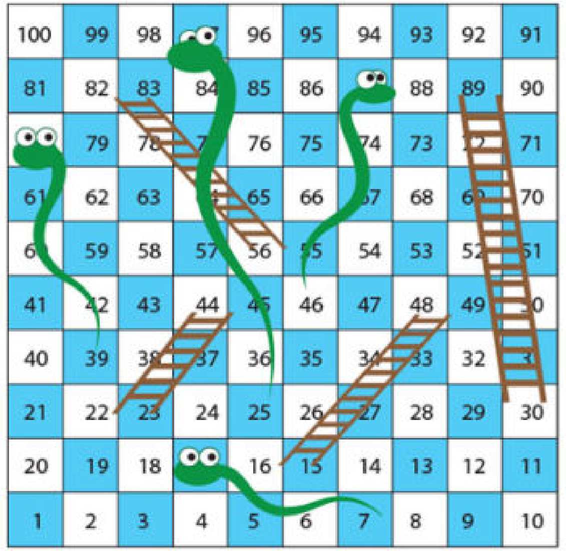
- Si se eligiera por votación la propuesta 2, ¿se podría contratar la *Taquiza Toño*? ¿Por qué? ¿Cuántas taquizas de las tres opciones podrían elegirse? ¿Cuál o cuáles?, ¿qué probabilidad hay de que alguna de las propuestas sea elegida? Comenten con sus compañeros las respuestas y justifíquenlas.
- Si la propuesta 3 fuera la ganadora, ¿cuántas taquizas podrían elegirse? ¿Cuál o cuáles? ¿Por qué?, ¿qué probabilidad hay de que alguna de las propuestas sea elegida? ¿Qué estrategias usaron para responder? Comenten con sus compañeros las distintas argumentaciones.
- Si la propuesta 1 fuera la ganadora, ¿cuántas taquizas podrían elegirse?, ¿cuál sería la probabilidad de escoger alguna de las propuestas de taquizas sugeridas? ¿Por qué? Argumenten sus respuestas.
- Si a la propuesta 2 le quitaran la opción de refresco, ¿cambiaría la elección? ¿Habría más probabilidades de resolver la cuestión de la contratación? Si se hace ese cambio, ¿es más probable que se elija la propuesta 2 o 3? Comenten con sus compañeros y justifiquen entre todos las respuestas.

Después de varios intercambios de opiniones, se decidió que la propuesta más completa es la 1 agregándole refresco. Entonces, ¿qué decisión deberán tomar los estudiantes respecto a las opciones que habían encontrado?

Cuando ya estaba concluyéndose la plática, Juan dice: "¡También tenemos que decidir dónde se hará el evento!" ¿Influirá el lugar elegido en la toma de decisión? ¿Por qué? Comenten con sus compañeros.

Actividad 2. Serpientes y escaleras

Luisa y Alejandro juegan "Serpientes y escaleras", éste se juega lanzando al mismo tiempo dos dados. La suma de los números que salgan representa la cantidad de casillas que se avanza. Gana el que llegue justo a la casilla número 100. En caso de que la suma exceda la cantidad necesaria para llegar a 100 deberá regresarse el número de casillas que se haya excedido.



- ¿Qué probabilidad se tiene de que en el dado uno se obtenga la cara con el número cinco? ___
- ¿Qué probabilidad se tiene de que en el dado dos se obtenga la cara con el número cinco? ___
- ¿Por qué ocurre esto? ___

Existen varias posibles situaciones que pueden presentarse cuando Luisa y Alejandro comienzan a jugar. Formen equipos de tres compañeros y respondan.

a) Al jugar, Luisa está en la casilla 95 y Alejandro en la 93.
  - ¿Quién tiene mayor probabilidad de que en la siguiente tirada obtenga con los dos dados el número exacto para ganar? ¿Por qué?
  ___

b) Luisa está en la casilla 99 y Alejandro en la casilla 88.
  - ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar en la siguiente tirada? Y si sólo se usara un dado, ¿la probabilidad cambia? Justifiquen ampliamente su respuesta.
  ___

c) Algunas posibles situaciones pueden ocurrir al jugar; por ejemplo…
  - Luisa requiere un siete para ganar. Puede tirar los dados al mismo tiempo, o primero uno y luego otro. Al tirar el primer dado, obtiene un cuatro, ¿qué probabilidad hay de que al tirar el segundo dado obtenga un tres?
  - ¿Qué relación hay entre las probabilidades que determinaron en el punto anterior? Expliquen ampliamente la respuesta y compartan sus reflexiones con el resto del grupo. ___

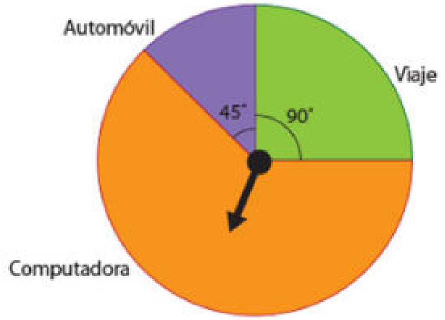
d) De manera grupal reflexionen sobre las características del cálculo de la probabilidad de que gane uno u otro, o de obtener un número u otro. El profesor puede dirigir el debate.¿Cuál es la probabilidad de obtener un seis al tirar sólo un dado? Y cuál es la probabilidad de obtener un seis como resultado de la suma de los dos dados? Establezcan una estrategia para responder a estas dos preguntas.
___

e) ¿La probabilidad cambia si se juega con más dados? ¿Qué pasa si un jugador tira sólo dos dados y el otro jugador lanza siete dados?

Actividad 3. La rueda de la fortuna[1]

Juanita asiste a un programa de televisión donde para ganar el premio mayor, debe jugar a la "rueda de la fortuna".

Sólo son tres premios: un automóvil, un viaje todo pagado o una computadora.



a) Juanita espera tener suerte y ganar el automóvil.
  - ¿El juego realmente depende de la suerte?¿Hay algo en el juego que la haga tener mayor probabilidad de ganar un premio en vez de otro?
  ___
  - ¿Cuál es la probabilidad de que Juanita gane el automóvil?
  ___

En grupo comenten las distintas estrategias usadas. En su cuaderno expliquen ampliamente la respuesta y escriban cualquier operación aritmética o dibujo que hayan utilizado para responder.

- ¿Importa saber cuánto mide el ángulo de cada sector? ___ ¿Por qué?
  ___
- ¿Qué porcentaje de la rueda ocupa la posibilidad de ganar el viaje, la computadora y el automóvil?

Viaje: ___% Computadora: ___% Automóvil: ___%

b) Si son tres premios (premio A: "ganar el viaje"; premio B: "ganar la computadora"; y premio C: "ganar el automóvil"), ¿qué probabilidad tiene Juanita de ganar cualquiera de los tres premios?

Probabilidad de ganar el premio A	
Fracción	Decimal
___	___

Probabilidad de ganar el premio B	
Fracción	Decimal
___	___

Probabilidad de ganar el premio C	
Fracción	Decimal
___	___

TIC

Podrán saber lo que ocurre cuando se juega con más dados que otro jugador viendo el juego entre Tim y Moby que se encuentra en: http://www.youtube.com/watch?v=cGT_YHZ7M7s (consultada el 8 de noviembre de 2012)
En la clase siguiente, comenten con el resto del grupo qué les pareció la estrategia que utilizó Moby. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

---

[1] Actividad inspirada en "Tipos de Eventos" tomada de http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=133238. (consultada el 8 de noviembre de 2012).

- ¿Qué relación tienen las probabilidades de este cuadro con los porcentajes que determinaron en el inciso *a*)?

  ____

c) Consideremos otros resultados.

- ¿Cuál es la probabilidad de que gane un premio?

  ____

- ¿Cuál es la probabilidad de que no gane ningún premio?

  ____

- Comenten con sus compañeros sus respuestas y entre todos lleguen a un acuerdo.

  ____

d) ¿Cuál es el resultado de sumar los porcentajes que ocupan los sectores correspondientes a los premios A, B y C en la circunferencia? ________________ %

e) ¿Cuál es el resultado de sumar las probabilidades, dadas en fracción, de los premios A, B y C? ______________________________

f) ¿Cuál es el resultado de sumar las probabilidades, en decimales, de los premios A, B y C?

En equipos de tres compañeros, compartan sus respuestas y reflexionen sobre las características principales de que las probabilidades fueran de esa manera. ¿En qué coincidieron o difirieron sobre la estrategia empleada en el inciso *a*) para saber la probabilidad de que se ganara el premio C?

Consideren las siguientes preguntas como apoyo para su reflexión:

¿Qué relación hay entre lo que respondieron en el inciso *d*), *e*) y *f*)?

____

¿Cualquier probabilidad puede expresarse de estas tres maneras? ¿Por qué? Con ayuda del profesor anoten los elementos importantes para poder representar la probabilidad de maneras distintas.

Una síntesis...

En estas actividades pudieron determinar que el rango en que se establece la probabilidad es entre 0 y 1. Estas probabilidades se representan de maneras distintas: con fracción, número decimal y hasta con porcentajes. Por otro lado, también pudieron distinguir aquellas situaciones que no dependen de otras, es decir, que son *independientes*. O bien, aquellas donde dos condiciones en una misma situación nos proveen de una probabilidad igual a cero.

LOS MÉTODOS

La probabilidad de que ocurra un **evento** puede escribirse de diferentes maneras, como lo han hecho en las actividades anteriores. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cruz?
Primero se debe distinguir cuál es el total de resultados; en este caso son dos, los cuales se expresan de la siguiente manera:

M: {cara, cruz}

Luego, se desea saber cuál es el resultado de que sea cruz; en este caso, sólo uno es favorable de los dos resultados, es decir:

El numerador representará el resultado favorable y el denominador, todos los posibles resultados. En este caso: $\frac{1}{2}$

GLOSARIO

Evento: en estadística y en probabilidad, un evento o suceso es un conjunto de posibles resultados que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

En los experimentos aleatorios pueden ocurrir diversos eventos.

Cuando se relacionan dos eventos, el resultado de uno puede no depender del otro, a estos casos se les denomina *eventos independientes*.

Un ejemplo de esto es que al tirar dos dados, se espera que se obtenga al menos un número par. El resultado que se obtenga de tirar un dado no alterará el resultado que se obtenga al tirar el segundo.

Por otro lado, en la Actividad 1, *La preparación de la fiesta de fin de curso*, la propuesta 1 sería imposible dadas las opciones, ¿por qué? Observa la siguiente tabla, y complétala de acuerdo con las reflexiones grupales habidas.

Requisitos para elegir la taquiza:	Cantidad de taquizas que tienen todos los requisitos
Que tenga botana y tortillas	
	2
Que tenga mantelería básica y refresco	
En este caso, en el último recuadro se presentan dos eventos que son mutuamente excluyentes.	

¿Qué caracteriza a los *eventos mutuamente excluyentes*?

Por otra parte, existen eventos que se complementan, como es el caso del inciso *d*) de la Actividad 3, *La rueda de la fortuna*, donde la probabilidad de que gane un premio es la suma de las respectivas probabilidades de ganar cada premio y que sea imposible "ganar el premio A y al mismo tiempo ganar el premio B". A este tipo de eventos se les llama eventos complementarios. Por tanto,

¿Qué caracteriza a los *eventos complementarios*?

En estas actividades distinguimos las características principales de diversos tipos de eventos. Formen un equipo con dos compañeros más y completen la siguiente tabla, basándose en las actividades que realizaron.

Sean los eventos: **evento A** **evento B** **Puede ocurrir que sean eventos:**	**¿Cómo se relacionan los eventos A y B?**	**¿Qué tipo de probabilidad puede resultar con estos eventos?**	**Generen un pequeño ejemplo que represente cada uno de los distintos tipos de evento.**
	Se debe cumplir la condición del evento A y no la del evento B, al mismo tiempo.		
Dependientes	El resultado del evento A se verá afectado por el resultado que se obtenga del evento B, o viceversa.		
Complementarios		La suma de los resultados de cada evento proporciona el total de los resultados posibles de ambos eventos.	
	El resultado del evento A no depende del resultado que se obtenga del evento B, o viceversa.		

Después de haber completado la tabla, expongan al resto de sus compañeros los ejemplos generados para describir los diferentes tipos de eventos que pueden ocurrir. En el pizarrón y en su cuaderno se anotarán las características esenciales de cada tipo de evento.

PARA HACER

1. Los motores de un avión trabajan independientemente y cada motor tiene probabilidad de 0.80 de no fallar durante un viaje. Un avión puede llegar a su destino siempre y cuando no fallen al menos la mitad de sus motores. Determinen qué tipo de avión tiene más probabilidad de llegar a su destino, si uno con dos motores o uno con cuatro. Expliquen ampliamente su estrategia y mencionen qué tipo de evento se refleja en este ejercicio.
2. Se tiene un dado de seis caras, con números del uno al seis. Si se lanza dicho dado…
   - *a*) ¿cuál es el conjunto de todos los posibles resultados del evento A: "se obtenga un número diferente de siete", del evento B: "se obtenga un número impar" y del evento C: "se obtenga un número par"?
   - *b*) ¿El evento B y el C son dependientes o independientes? ¿Por qué?
   - *c*) Sean el evento D: "el resultado es menor a cuatro" y el evento E: "el resultado es cuatro o mayor".

La Actividad 1 de la sección "Para hacer" se tomó del libro: Hernández-del-valle, A. y Hernández-Lerma, O. (2003). *Elementos de probabilidad y estadística*. pp. 105. México: Textos 21.

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento D y el evento E al mismo tiempo? ¿Qué tipo de eventos son? Expliquen las estrategias usadas.

   - *d*) Si los resultados favorables de que ocurra el evento F es F:{2, 6}, ¿cuál sería el conjunto de posibles resultados que le sea complementario?

3. En una bolsa negra se tienen dos canicas rojas, dos negras, dos verdes. Y en cada turno se saca al azar una canica, sin después regresarla a la bolsa.
   - *a*) En el primer turno, ¿cuál es la probabilidad de que salga una canica negra?
   - *b*) En el segundo turno, ¿qué probabilidad hay de sacar nuevamente una canica negra?
   - *c*) ¿Qué tipo de evento nos describe el resultado obtenido en el inciso *b*)?

En grupos de tres compañeros, comenten sus estrategias y comparen los resultados obtenidos por el resto del grupo.

En esta lección aprendimos a distinguir eventos dependientes, independientes, mutuamente excluyentes y complementarios, de un experimento aleatorio. Asimismo, nos dimos cuenta de que la representación de la probabilidad de un evento puede hacerse de diferentes maneras, lo cual nos permite utilizar la que consideremos pertinente.

Trabajamos con eventos complementarios, caracterizamos a los eventos mutuamente excluyentes y distinguimos a los dependientes de los independientes. ¿Hay alguna situación que represente eventos que sean mutuamente excluyentes y sean dependientes?, o bien, ¿existe alguna situación que represente eventos complementarios y que sean independientes? Compartan sus reflexiones y con la ayuda del profesor respondan si es posible o no; por último, proporcionen ejemplos de ello.

LECCIÓN 1.7

En esta lección diseñarás una encuesta o un experimento e identificarás la población en estudio y discutirás sobre las formas de elegir el muestreo. También, obtendrás datos de una muestra y buscarás las herramientas convenientes para su presentación.

PARA APRENDER

Actividad 1. ¿Vamos al museo?

En una encuesta realizada por el Consejo Nacional para la Cultura y las Artes, con el fin de ofrecer mayor información sobre diferentes aspectos de la cultura mexicana, encuestaron a ciudadanos mayores de 15 años que visitaron distintos museos del Distrito Federal.

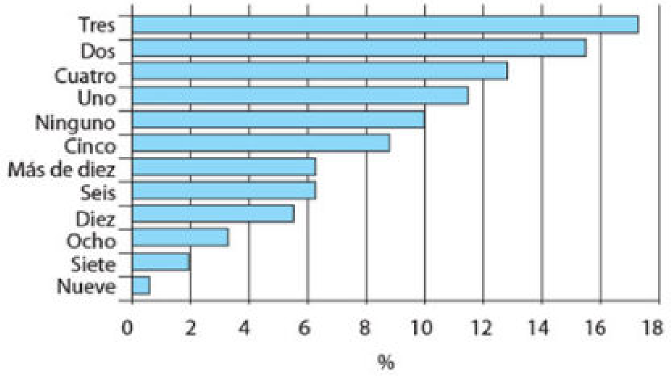
a) Lo primero que se preguntó fue la razón principal de su visita al museo; las respuestas se registraron en la siguiente tabla:

Espacios	Para hacer una tarea, se lo pidieron en la escuela	Para entretenerse, pasar un rato agradable	Vio un anuncio en los medios de comunicación	Para educar a los niños	Se lo recomendó un familiar o amigo	Para ver qué novedades hay	Para acompañar a alguien	Otro (especifique)	Total
Museo de Arte Moderno	44.0	29.8		0.8	1.0	11.3	9.8	3.5	100.00
Museo del Estanquillo	24.3	49.5	2.3	2.0	3.0	3.3	5.5	10.3	100.00
Museo del Palacio de Bellas Artes	25.3	51.8		5.0	1.3	5.0	8.3	3.5	100.00
Museo del Templo Mayor	47.5	28.8		2.5	0.3	1.5	16.5	3.0	100.00
Trompo Mágico Museo Interactivo	3.8	58.8	2.5	10.8	4.8	6.3	4.5	8.8	100.00
Museo Interactivo de Economía	71.5	18.3		2.0	0.5	0.3	5.3	2.3	100.00
Museo Nacional de Antropología	48.0	29.3		2.5	0.3	6.0	9.5	4.5	100.00
Museo Nacional de Arte	37.5	37.8		1.0		7.3	14.0	2.5	100.00
Museo Nacional de Historia de Chapultepec	40.8	33.0		10.3	0.3	0.8	9.8	5.3	100.00
Museo Nacional de las Culturas	46.5	31.5		4.0	0.3	4.3	11.8	1.8	100.00
Museo Nacional de los Ferrocarriles Mexicanos	12.3	42.5	1.0	16.0	3.3	11.5	1.5	12.0	100.00
Museo Palacio Cultural Banamex	3.3	73.8		1.0	1.5	16.5	1.0	3.0	100.00
Museo Regional de Puebla	20.0	43.3	1.0	8.3	5.0	11.7	3.3	7.3	100.00
Museo Tamayo Arte Contemporáneo	33.8	32.3		2.3	2.5	16.8	5.8	6.8	100.00
Papalote Museo del Niño	13.0	32.8		31.3	0.8	3.0	7.8	11.5	100.00
Total	31.6	39.5	0.4	6.6	1.6	6.9	7.7	5.7	100.00

Fuente: Encuesta a públicos de museos 2008-2009. Informe de resultados. (2009) Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

- Las personas seleccionadas para responder la encuesta, ¿son elegidas al azar? Argumenten su respuesta. ______________________________
- ¿Por qué consideran que la población encuestada se conformó de ciudadanos mayores de 15 años? ______________________________
- Según la encuesta, ¿cuál es el mayor motivo por el que asisten al Museo Nacional de las Culturas? ¿Y al Museo del Palacio de Bellas Artes? Comenten con tus compañeros las respuestas. ______________________________
- ¿Qué significado tiene la última columna que dice "Total", en donde aparecen todos los valores como 100.0? Comenten con sus compañeros las distintas respuestas. ______________________________
- ¿Se puede saber el total de encuestados? ¿Por qué? Comenten con sus compañeros las respuestas y justifiquen. ______________________________
- Considerando todos los museos en donde se realizaron las encuestas, ¿cuál es el mayor y el menor motivo por el cual se asiste a ellos? ¿Cómo encontraron esta información? Comenten las distintas estrategias con sus compañeros y argumenten sus respuestas.

b) Otra de las cuestiones que se preguntó fue la cantidad de museos que uno visitó en los últimos 12 meses. Las respuestas de los encuestados fueron las siguientes:



Fuente: Encuesta a públicos de museos 2008-2009. Informe de resultados. (2009) Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

- ¿Qué información podemos obtener de la gráfica? Comenten con sus compañeros las distintas interpretaciones y escríbanlas en su cuaderno.

  ____
- Con la información tal como se presenta, ¿se podrían saber las respuestas de los encuestados en el Museo Nacional de Historia de Chapultepec? ¿Por qué?

  ____
- Con la información brindada, ¿se sabe a cuántas personas se encuestó? Justifiquen su respuesta. ______________________
- ¿A quiénes podrían realizar esta encuesta? ¿Qué características deberían tener esas personas? ¿Por qué? Comenta en grupo las distintas respuestas.

  ____

TIC

Para consultar la encuesta sobre el Informe de Museos 2008-2009 del Consejo Nacional para la Cultura y las Artes puedes ingresar a: http://sic.conaculta.gob.mx/publicaciones_sic/EPM08-09.zip (consultada en octubre de 2012) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

c) Como han podido observar en los ejemplos anteriores, la información puede presentarse de distintas maneras. Reúnanse en grupos de tres compañeros y comenten las respuestas:

- ¿Qué se pretende saber con las encuestas realizadas? ______________
- ¿Qué diferencias hay entre ambas maneras de presentar la información?

  ____
- ¿Existen otras formas de representar la información? Comenten con sus compañeros las distintas estrategias que cada uno propuso y hagan una puesta en común. ______________________________

  ____
- Si les es posible, consulten el Informe de Museos realizado por el Consejo Nacional para la Cultura y las Artes de México que aparece en las TIC e investiguen las distintas maneras de presentar la información obtenida de las encuestas.

d) Para la clase siguiente, formen un grupo con dos compañeros más, a fin de elegir uno de los temas abordados en la encuesta mencionada (por ejemplo: actividades interactivas, escala de expectativas, baños, entre otros) y explica a todo el grupo una de las maneras de presentar la información, así como sus beneficios y desventajas.

GLOSARIO

Experimento: procedimiento mediante el cual se trata de comprobar (confirmar o verificar) una o varias hipótesis relacionadas con un determinado fenómeno, mediante la manipulación de la(s) variable(s) que presumiblemente es (son) su causa.

Actividad 2. ¿Son efectivos los antigripales?

Un laboratorio quiere comprobar si su nuevo producto antigripal es más efectivo en mujeres que en hombres (menores de 20 años). Para ello, realizarán un experimento y consultarán a jóvenes (hombres y mujeres) cómo se sintieron después de tomar la medicina durante tres días; las opciones de respuesta son: mejoré completamente, tuve leves mejorías, no mejoré.

En equipos de tres compañeros, contesten las siguientes preguntas:

- ¿Qué se pretende saber con el experimento a realizar? ¿Qué diferencias hay con las encuestas que preguntan sobre opiniones? Comenten con sus compañeros las respuestas y argumenten. ______________________
- Las personas seleccionadas para hacer la consulta, ¿podrían ser elegidas al azar? Justifiquen ampliamente la respuesta.

  ____
- ¿Qué población se elegiría para realizar la consulta? ¿Por qué? Comenten con todo el grupo las distintas consideraciones que tuvo cada uno y lleguen a un acuerdo sobre cuáles son las indispensables.

  ____
- Si se tuvieran los datos que aparecen en la tabla de abajo como resultado de la consulta, ¿se comprobaría la hipótesis del laboratorio: "el nuevo producto antigripal es más efectivo en mujeres que en hombres (menores de 20 años)"?, ¿qué estrategia utilizaron para justificar la respuesta? Coméntenlo con sus compañeros para llegar a un acuerdo.

	Mujeres	Hombres
Mejoré completamente	7 895	5 912
Tuve leves mejorías	6 739	8 294
No mejoré	366	794
Total	15 000	15 000

Actividad 3. Reflexionemos

- ¿Qué diferencias y similitudes hay entre la Actividad 1 y la Actividad 2 respecto a lo que pretende saber cada una? ______________________
- ¿Cuándo se puede elegir a la población al azar? ¿Cuándo debe seleccionarse una población específica? Justifiquen su respuesta y den tres ejemplos de cada una de las situaciones.

Una síntesis…

Las encuestas representan observaciones o fenómenos sobre los cuales pocos o ningún control se impone. Es uno de los mecanismos que se utilizan para obtener datos, mismos que se analizan a través de cuestionarios prediseñados. Su intención es conocer estados de opinión, características o hechos específicos. En cambio, los experimentos son procedimientos mediante los cuales se trata de comprobar (confirmar, verificar o negar) una o varias hipótesis relacionadas con un determinado fenómeno, mediante la manipulación de la(s) variable(s) que presumiblemente es (son) su causa.

LOS MÉTODOS

Lo primero es diferenciar las encuestas de los experimentos. Para ello, en grupos de tres compañeros, completen la siguiente tabla de comparación:

	Encuesta	Experimento
Características generales		
Elección de la población (al azar o específica)		
Consulta opinión o comprueba hipótesis		
Tipos de presentación de los datos obtenidos		
La información de los datos obtenidos nos sirve para…		

Ahora, deberán diseñar la propia encuesta o experimento. Una vez que se analice, la compartirán con toda la clase. Para organizar lo que se debe tener en cuenta para el diseño, se sugiere completar la tabla con algunos puntos importantes; podran agregar aquellos que consideren necesarios para el diseño de encuesta o experimento.

Diseño de ________
Temática ________
Objetivo ________
Población elegida ________
Preguntas a realizar ________
Tipo de presentación de datos obtenidos ________

Recuerden, al concluir el diseño y realizar la encuesta o el experimento, habrá que hacer una puesta en común comentando la información de los resultados obtenidos.

PARA HACER

1. Para los Juegos Olímpicos en Londres 2012 una de sus páginas web realizó la siguiente encuesta: ¿Cuál ha sido el encendido de la antorcha olímpica más espectacular? Los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes:

Fuente: http://www.juegosenlondres2012.com/encuestas (consultada el 25 de octubre de 2012)

- ¿Qué características consideran que deben tener las personas a las que se les realice la encuesta? Por ejemplo, ¿deben ser mujeres, hombres o es indistinto? Justifiquen su respuesta y comenten con sus compañeros las distintas características que consideraron.

____

- Reúnanse en grupo y comenten cuál es el significado de las olimpiadas y en particular de la antorcha olímpica. Si no lo saben, pueden platicar con su profesor de Educación Física, preguntar a alguien de su comunidad o pueden usar la información de las TIC y averiguar.
- Dado que los Juegos Olímpicos son eventos deportivos multidisciplinarios en los que participan atletas de diversas partes del mundo, ¿consideran suficiente la participación de 4 512 personas? ¿Importaría saber las nacionalidades de esas personas? Justifiquen sus respuestas.

____

2. En el año 2012 se hizo una campaña muy importante sobre la prevención del cáncer de mama, en vista de la enorme cantidad de casos registrados en México. En ella se recomendó que a partir de los 18 años todas las mujeres se realicen una **ecografía mamaria** anualmente.

   a) Si tuvieran que realizar una encuesta sobre este tema, ¿qué información deberían conocer? ¿Cuál sería la población elegida para hacer la encuesta? ¿Qué preguntas realizarían? Por ejemplo, ¿en su familia hay antecedentes de cáncer? Reúnanse en grupos y reflexionen las preguntas.

   ____

   b) En una puesta en común, decidan cuáles son las preguntas más importantes y diseñen una encuesta. Pueden aplicarla a la población que consideren pertinente.

GLOSARIO

Ecografía mamaria: estudio médico que se recomienda su realización para detectar nódulos mamarios en mujeres de cualquier edad. Además se utiliza como guía para punciones eco-dirigidas ante la sospecha de cáncer de mama.

c) Con la información de los datos obtenidos luego de realizar la encuesta, diseñen un cartel para colocarlo en la escuela con el fin de informar a todos los compañeros, profesores, autoridades, etcétera, de los resultados obtenidos, subrayando la necesidad de que las mujeres, a partir de cierta edad, se hagan ese estudio médico. Pueden pedirle ayuda a su profesor de Biología para diseñar el cartel con la información pertinente.

3. En los noticieros se informa que más del 60% de los estudiantes reprueban los exámenes de Matemáticas. Diseñen un experimento para comprobar si esta afirmación es verdadera o falsa en su escuela.

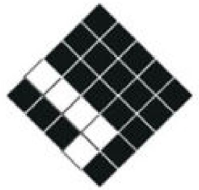
En esta lección aprendieron a diseñar una encuesta o experimento, identificando la población en estudio, las formas de elegir el muestreo y las maneras de representar los datos obtenidos. De manera grupal, realicen una síntesis sobre las diferencias que identificaron entre la encuesta y el experimento. Los periódicos muchas veces usan estas herramientas para informarnos sobre la situación del país; por ejemplo, ¿cuál es la situación económica de las familias mexicanas? Reflexionen en grupo sobre las características que deberían considerarse para que la información obtenida sea lo más confiable posible.

Comenten qué dudas surgieron de la lección, analícenlas y resuélvanlas con ayuda de su profesor.

EVALUACIÓN

1. Expresiones cuadradas

En el ejercicio nueve de la sección Para Hacer, lección 1.1, trabajaste con la siguiente sucesión de cuadraditos.

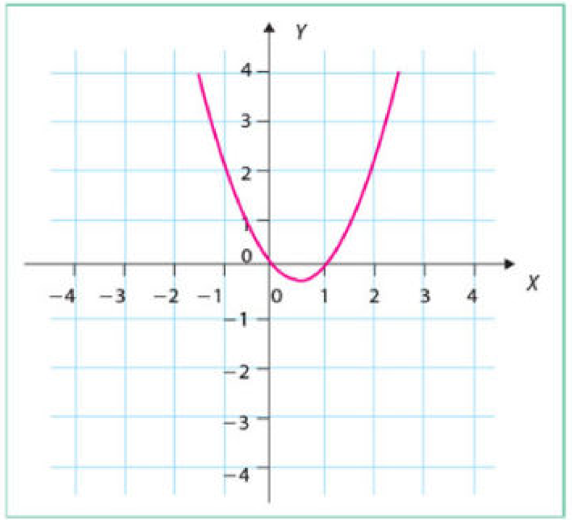
Posición	1	2	3	4	5
Sucesión					
Número de cuadraditos:	0	2	6	12	20...

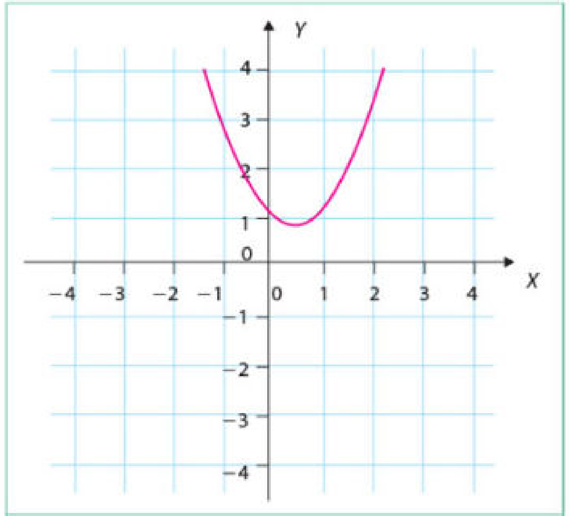
a) Esta sucesión tiene la propiedad de que en cada posición aumenta el número de cuadraditos. ¿Se puede afirmar que la relación es proporcional? _______ Da una explicación que fundamente tu respuesta.

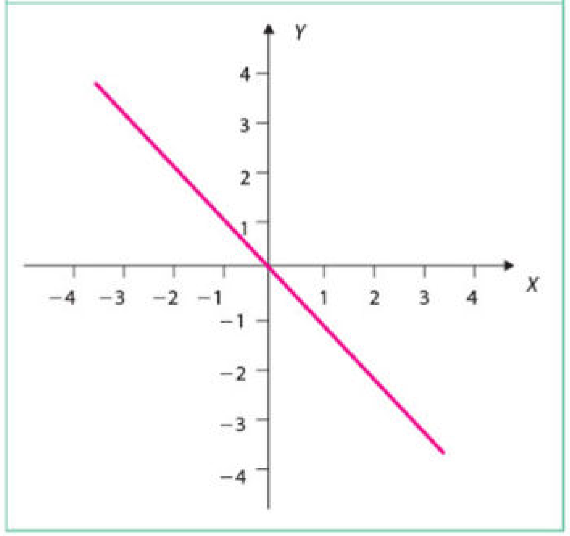
¿Por qué? ____

b) ¿Cuál es la expresión algebraica asociada a esta sucesión? ______________________

c) **Analiza las siguientes gráficas y encierra la que corresponde a la expresión algebraica escrita. Da argumentos matemáticos para justificar tu elección.**







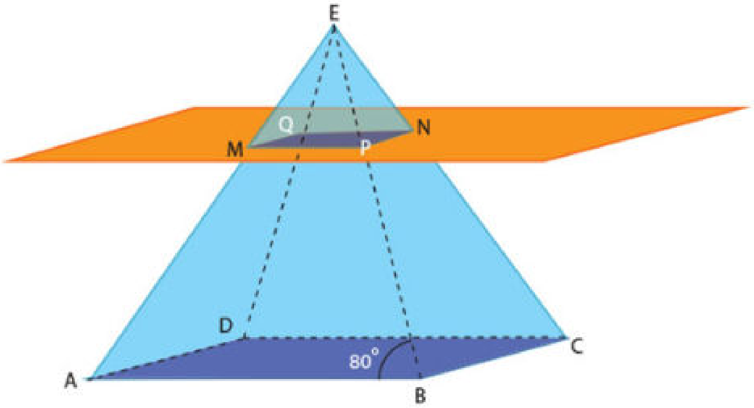
d) Discutan en equipo qué significa la parte de la gráfica cuando la *x* es menor que 1. ¿Estos valores tienen sentido en la sucesión? ____________________

____

e) Propongan un bosquejo gráfico que represente lo mejor posible a la sucesión. Den argumentos de su propuesta.

2. La pirámide congruente

En la pirámide recta cuadrangular ABCDE, las aristas AB y BE miden 5.7 cm y 8 cm respectivamente, y la medida del ángulo ABE es 80°. Si la pirámide es cortada por un plano paralelo a la base justo a dos tercios de ésta:



a) ¿Qué medida tendrá el perímetro de cada uno de los triángulos que conforman las caras laterales de la pirámide MPNQE?

____

____

b) En tu libreta construye una pirámide congruente a la pirámide MPNQE.

3. La mejor preparatoria

Juan está buscando información sobre los exámenes de ingreso en las distintas preparatorias de su comunidad. Algunas tienen menos requisitos que otras. Todas son tanto para hombres como para mujeres.

- ✓ En la preparatoria Aureliano Buendía, piden que sus estudiantes tengan entre 14 a 18 años, que el promedio de calificaciones sea mayor a ocho y una cuota voluntaria mensual.
- ✓ En la preparatoria Emilio Pacheco, como es una escuela para adultos, piden que la edad mínima sea 19 años y una cuota voluntaria mensual.
- ✓ En la preparatoria Paula Allende, como es un colegio privado, piden que los estudiantes tengan entre 14 y 18 años y el pago mensual de la inscripción.

a) De las siguientes opciones, cuál o cuáles serían las que le permitirían a Juan ingresar a la preparatoria Paula Allende:

i. Juan tiene 15 años, sus calificaciones son mayores a ocho y tiene dinero suficiente para pagar la inscripción.
ii. Juan tiene 15 años, sus calificaciones son mayores a ocho y no tiene dinero suficiente para pagar la inscripción.
iii. Juan tiene 15 años, sus calificaciones son menores a ocho y tiene dinero suficiente para pagar la inscripción.
iv. Juan tiene 15 años, sus calificaciones son menores a ocho y no tiene dinero suficiente para pagar la inscripción.

b) ¿Es posible que Juan eligiera las tres preparatorias para presentar sus papeles de ingreso? ¿Qué característica lo impide? Y si obtuviera una beca para sus estudios, ¿cambiaría en algo tu respuesta?

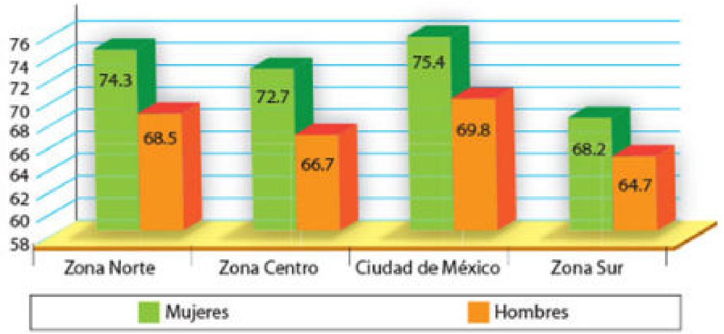
____

c) Dadas las opciones de escuelas, ¿qué probabilidad tiene cada preparatoria de ser escogida si las condiciones de Juan fueran las características dadas en i, ii, iii y iv, respectivamente? __

____

4. Un problema de salud

La obesidad en México es una enfermedad que preocupa a la población. En la siguiente gráfica están representadas las tasas de obesidad y sobrepeso por género y región geográfica. La información corresponde al año 2009 (las cifras se dan por cada 100 habitantes).



Fuente: Documento de Trabajo, núm. 133, junio 2012. Publicación del Centro de Estudios Sociales y de Opinión Pública de la Cámara de Diputados, LX, Legislatura (p. 9). Consultado el 14 de noviembre de 2012 a las 16:00 horas.

a) Un presentador de TV mostró la gráfica anterior y dijo:

"La gráfica muestra que en la Ciudad de México existe una mayor tasa de obesidad y sobrepeso comparada con la Zona Sur. A su vez, los hombres tienen mayor tasa de obesidad que las mujeres en cualquiera de las zonas."

¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable de la gráfica? Da una explicación que fundamente tu respuesta.

____

b) Si se requiere realizar una encuesta nacional para obtener información del estilo de vida que fomenta esta enfermedad:

i. ¿A cuál población consideras más oportuno realizarle este tipo de encuesta?

____

Da una explicación que fundamente tu respuesta. ________________________

____

ii. ¿Qué características deberías considerar para elegir el muestreo? Descríbelas.

____

c) Al diseñarse una campaña preventiva nacional,

i. ¿A quiénes debería estar dirigida? Describe a la población. ______________________

ii. Teniendo en cuenta la pirámide de alimentación saludable que aparece en la siguiente página, si los resultados de una encuesta dicen que 70% de la población tiene una alimentación basada en grasas y dulces, ¿qué podrías suponer de esa población?

____

iii. Elabora cinco preguntas que permitirían tener información sobre la alimentación de tu comunidad.

____

5. Los jarrones de Oaxaca

En la fábrica de una comunidad de Oaxaca se producen jarrones artesanales. Por cada jarrón vendido se ganan 150 pesos. Asimismo, en la empresa *Voilá*, venden esos mismos jarrones, pero su ingreso mensual está dado por la fórmula $y = -x^2 + 500$. Aunque las grandes empresas siempre ganan más dinero que las fábricas particulares, en este caso:

a) ¿Cuántos productos debe vender la empresa *Voilá* para no tener pérdidas?

____

b) ¿Cómo expresarías la ganancia de la fábrica que está en la comunidad? ¿Qué características tiene este tipo de relación entre la ganancia y la cantidad de productos vendidos?

____

c) Si para fin de año se esperan vender 350 jarrones, ¿a quién le convendrá más la venta?

____

Autoevaluación

Reflexiona acerca de lo que has aprendido en este bloque para resolver los problemas anteriores. Reproduce esta tabla en tu cuaderno y complétala considerando una escala del 1 al 5, donde 1 es "Totalmente en desacuerdo" y 5 "Totalmente de acuerdo".

Utilicé en la resolución de situaciones	Logré comprender y aplicar los conocimientos al resolver situaciones con	Usaría en la vida cotidiana lo que aprendí con
la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.		

Coevaluación

Con un par de compañeros intercambien sus evaluaciones, comenten y comparen las respuestas que propusieron en ellas y discutan coincidencias y diferencias. Preparen una explicación para cada problema de la evaluación y conviertan sus inquietudes o dificultades en preguntas para compartirlas con el grupo y su profesor. Reflexionen también con sus compañeros y profesor sobre lo que escribiste en la tabla de Autoevaluación. Es importante compartir tus dificultades y tus fortalezas con tus compañeros; aprovecha ese espacio para aclarar cada duda que tengan y consolidar sus conocimientos.

Los invitamos a que después del debate completen una tabla producto del consenso del grupo. Esta experiencia les servirá para consolidar sus aprendizajes antes de pasar al siguiente bloque.

BLOQUE 2

El *teselado* es una forma de cubrir el plano mediante figuras planas siguiendo un patrón. Esta técnica se ha utilizado en todo el mundo desde los tiempos más antiguos para recubrir suelos y paredes; también se ha usado para crear motivos decorativos de muebles, alfombras, tapices y ropa. Las únicas dos condiciones que debe satisfacer un teselado es que no deje huecos (que cubra por completo la superficie) y que las figuras no se superpongan, que sólo queden "pegadas". La imagen de abajo muestra una figura con la cual es posible cubrir el plano bajo las condiciones anteriores. Sin levantar la figura, ¿qué movimientos harías para obtener un teselado como la imagen de abajo?

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Figura y diseño geométrico

LECCIÓN 2.1

En esta lección aprenderás a utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

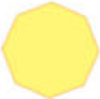
PARA APRENDER

Formen equipos para analizar las actividades de esta lección, donde estudiarán con sus compañeros diferentes situaciones en las cuales será necesario que determinen expresiones algebraicas de tipo cuadrático que describan los fenómenos involucrados, así como generar estrategias para resolver las ecuaciones que emerjan.

Actividad 1. Entre lados y diagonales

Desde los primeros años de primaria han estado estudiando geometría. Les han enseñado a distinguir, entre otros elementos importantes que permiten caracterizar las figuras geométricas, el número de sus lados; también han aprendido a calcular su área de maneras diferentes y dibujar sus diagonales:

a) Recuerden algunas características de los polígonos y anótenlas en la siguiente tabla. Si ya no se acuerdan, dibujen en sus cuadernos las figuras que muestren los elementos mencionados o busquen información en libros, internet o bibliotecas:

Nombre del polígono	Figura	Número de lados	Número de diagonales
Triángulo			
Cuadrado			2
		5	
Hexágono			
		7	
			20

b) ¿Qué relación encuentran entre el número de lados y el número de diagonales de cada polígono de la tabla?

____

c) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 12 lados? _______ ¿Cómo lo determinarían?

____

d) La expresión algebraica que relaciona el número de lados y el de las diagonales es: $N = \frac{n(n-3)}{2}$. Analicen con sus compañeros a qué se refiere la variable "N" y a qué, la variable "n".

e) ¿Cuántos lados tiene un polígono de 27 diagonales? ___________ ¿Y uno de 90 diagonales?

____

f) Analicen con sus compañeros las respuestas obtenidas, comparen las estrategias que siguieron para contestar las preguntas y escriban en su cuaderno las ideas principales.

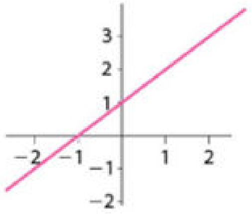
TIC

Para completar y profundizar tus conocimientos, te recomendamos resolver las actividades de Recursos interactivos del Bloque II, páginas 15 a 17 de la GIS (*Guía interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual puedes consultar en http:// basica.sep.gob.mx/ dgdgie/ cva/gis/index.html: (consultada en noviembre de 2012) .
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

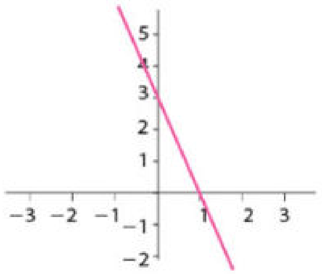
Actividad 2. Entre gráficas y raíces

En segundo año estudiaron cómo graficar funciones lineales, es decir, funciones del tipo $y = ax + b$; asimismo, aprendieron a determinar sus raíces observando con cuidado la intersección de la gráfica de la función y el eje de las x.

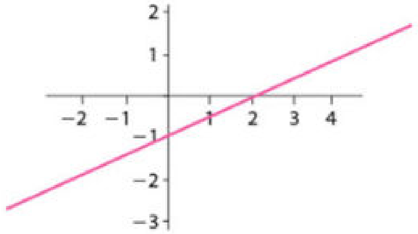
a) Calculen las raíces de las siguientes funciones lineales, expliquen cómo lo hicieron y escriban sus conclusiones en el cuaderno.



(a)



(b)



(c)

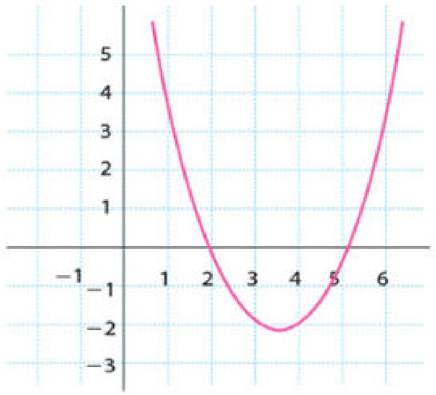
b) Si bien en el siguiente bloque se trabajará con mayor detalle y profundidad la manera de graficar funciones cuadráticas, ahora los desafiamos a "leer" sus gráficas y a determinar sus raíces; es decir, a determinar los puntos donde la gráfica interseca al eje de las x y a descubrir otra manera de escribir la expresión general de estas funciones.

Vimos en la Lección 1.1 que la expresión general de una función cuadrática es:

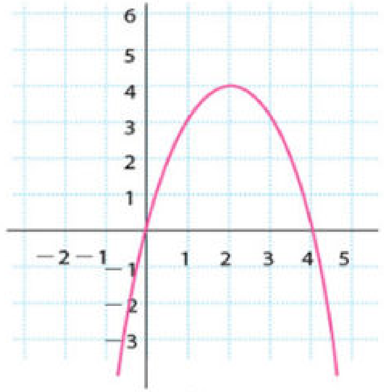
$$y = ax^2 + bx + c.$$

Sin embargo, esta expresión general puede expresarse de manera factorizada como: $y = a(x - p)(x - q)$, donde p y q son las raíces de la ecuación, siendo a el mismo coeficiente del término cuadrático. Apoyándonos en esta última expresión, exploremos cómo determinar las expresiones algebraicas de funciones cuadráticas de las que sólo conocemos su gráfica.

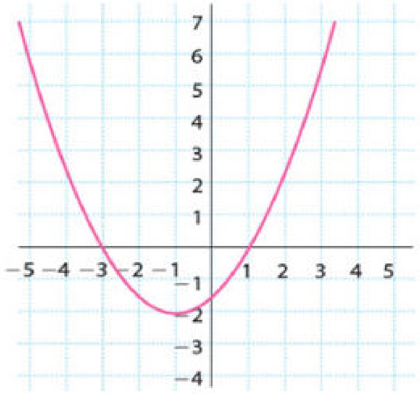
c) Trabajando con sus compañeros determinen las raíces de las funciones cuadráticas mostradas en las siguientes gráficas y escríbanlas en su cuaderno.



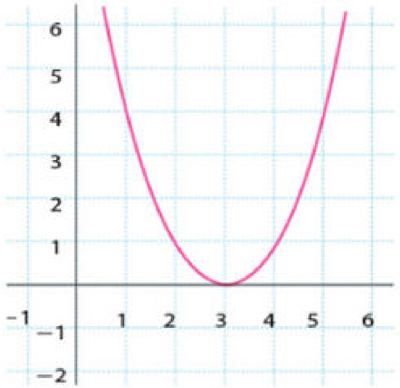
(a)



(b)



(c)



(d)

TIC

Para completar y profundizar tus conocimientos, te recomendamos resolver las actividades 16 y 17 del Bloque II, páginas 35 a 37 de la GIS (*Guía interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual puedes consultar en https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (consultada en octubre de 2013) Comparte y discute con tus compañeros las respuestas.

c.1) ¿A qué gráfica le corresponde la expresión algebraica: $y = (x + 3)(x - 1)$? _____ Argumenten su respuesta; aprovechando los datos del inciso anterior, escriban las expresiones algebraicas factorizadas de cada una de las funciones considerando que, en estos casos, *a* sólo puede tomar el valor 1 o −1.

____

____

c.2) ¿Qué valores toman, en cada caso, los coeficientes *a*, *b*, y *c* de la expresión general de la función cuadrática? _____ ¿Cómo se pueden determinar? ______________ Analicen con su profesor la relación entre los valores de las raíces de las funciones y los coeficientes de sus expresiones generales.

c.3) Si la expresión algebraica de una función es: $y = x^2 + 5x$, donde $a = 1$; $b = 5$ y $c = 0$, ¿cuál es su expresión factorizada? _______ ¿Y sus raíces? _______ ¿Qué relación existe entre *a*, *b* y *c* y los valores de las raíces de la función?

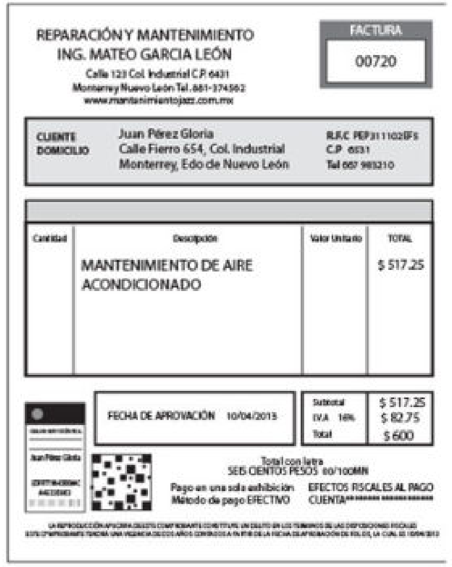
____

c.4) Compartan con sus compañeros las respuestas de cada inciso y analícenlas con su profesor para escribir las conclusiones en su cuaderno.

Actividad 3. Cómo experimentar con situaciones: incremento de la ganancia de una empresa

Don Mateo desea aumentar las ganancias de su empresa "Friolito", donde cobra $600 cada semestre a sus 15 clientes por el mantenimiento de cada aire acondicionado.

Para aumentar sus ganancias solicita un estudio mercadotécnico, el cual le recomienda disminuir la póliza, ya que por cada $100 que la disminuya podría incorporar a cinco clientes.



REPARACIÓN Y MANTENIMIENTO
ING. MATEO GARCIA LEÓN
Calle 123 Col. Industrial C.P. 6431
Monterrey Nuevo León Tel. 881-374562
www.mantenimientojazz.com.mx

FACTURA
00720

CLIENTE Juan Pérez Gloria
DOMICILIO Calle Fierro 654, Col. Industrial
Monterrey, Edo de Nuevo León
R.F.C PEP311102EF5
C.P 6531
Tel 667 983210

Cantidad	Descripción	Valor Unitario	TOTAL
	MANTENIMIENTO DE AIRE ACONDICIONADO		$ 517.25

FECHA DE APROVACIÓN 10/04/2013

Subtotal	$ 517.25
IVA 16%	$ 82.75
Total	$ 600

Total con letra
SEIS CIENTOS PESOS 00/100MN

Pago en una sola exhibición
Método de pago EFECTIVO

EFECTOS FISCALES AL PAGO
CUENTA****** ********

a) ¿En cuántos pesos debe reducirse la tarifa para que don Mateo obtenga la máxima ganancia semestral? _________ ¿obtendrá más ganancias si inscribe más personas que paguen una póliza menor? Analícenlo con sus compañeros luego de completar la siguiente tabla:

Número de disminuciones en la póliza	Disminución de precio	Número de clientes	Póliza semestral	Ganancia semestral
0	0	15	600	9000
1	100	20	500	
2				
3				

b) De las siguientes expresiones algebraicas:

$G = (600 + 100x)(15 + 5x)$
$G = 5\,(120 - 20x)(3 + x)$
$G = 9000 + 5x - 100x^2$
$G = (600 - 100x)(15 + 5x)$

donde G = ganancia semestral y x = número de disminuciones en la póliza realizadas. ¿Cuál describe la ganancia semestral de don Mateo? _______________ Analicen con sus compañeros y escriban en sus cuadernos la conclusión a la que llegaron; argumenten la estrategia utilizada para decidir. Expliquen también las razones por las que se rechazaron las otras expresiones cuadráticas.

c) ¿Qué cantidad de disminuciones en la póliza provocaría que Don Mateo tuviera una ganancia nula? ____________________ Teniendo en cuenta lo anterior, ¿qué número de clientes no le conviene aceptar a Don Mateo?

____

TIC

Busquen en Internet la página de la Televisión Educativa que la SEP propone explorar (http://www.televisioneducativa.gob.mx/index.php/videos-telesecundaria) y en ella, seleccionen el video: *Resolución de ecuaciones cuadráticas expresadas en su forma general* en la sección de Bloque III Matemáticas. Analicen la información y discútanla con su profesor. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Una síntesis…

En lecciones anteriores se percataron de que las ecuaciones de segundo grado tienen la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números que por lo general conocemos y x es la incógnita cuyo exponente máximo es 2 (lo cual le da el nombre al tipo de ecuación); asimismo, determinaron el número máximo de soluciones que pueden hallarse. En la primera actividad nos encontramos con una expresión cuadrática que involucra dos factores: $N = \frac{n(n-3)}{2}$ donde n corresponde al número de lados y N el número de diagonales que tiene el polígono estudiado.

Por ejemplo, si un polígono tiene 15 lados, el número de diagonales que quedan determinadas en esa figura geométrica es:

____

____

Es decir, para determinar el número de diagonales que tiene un polígono, conociendo el número de lados es necesario:

____

____

Se complica un poco determinar el número de lados que tiene un polígono si se conoce el número de diagonales. Por ejemplo, si saben que el polígono tiene 20 diagonales pueden determinar que sus lados son ocho. ¿Qué estrategia pueden utilizar para determinarlas?

____

____

En la Actividad 2 pudieron observar que cuando una función cuadrática tiene dos raíces reales se puede establecer la expresión algebraica:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - p)(x - q)$$

donde p y q son las raíces de la función cuadrática que determinaron observando el punto donde la gráfica corta al eje de las x; es decir, hallaron gráficamente las soluciones de: $ax^2 + bx + c = 0$, sin conocer aún los valores de a, b y c.

Por ejemplo, la expresión algebraica de la gráfica b es: $y = -x(x - 4)$ ya que las soluciones de la ecuación cuadrática: $-x(x - 4) = 0$ son: $p =$ ____________ y $q =$ ____________, mismas que se pueden observar en la gráfica. Además, si desarrollan la multiplicación de factores de: $y = -x(x - 4)$ se obtiene que:

$$y = -x^2 + \underline{\qquad\qquad}$$

donde se observa que $a = -1$, $b =$ ____________ y $c =$ ____________.

Es decir que: $y = -x(x - 4) = -x^2 + 4x$

LOS MÉTODOS

Recuerden que resolver una ecuación cuadrática es encontrar un par de valores para la incógnita involucrada, de tal manera que la igualdad se mantenga o se compruebe. Por ejemplo, en la Actividad 3 se puede analizar la ganancia de don Mateo con la ecuación:

$$G = (600 - 100x)(15 + 5x)$$

y, para asegurar que no haya ganancia basta anular uno de los factores establecidos, es decir que:

$$\begin{tikzcd} & 600 - 100x = 0 \text{ cuando } x = \underline{\qquad\qquad} \\ (600 - 100x)(15 + 5x) = 0 \text{ si} \arrow[ur] \arrow[dr] & \text{o} \\ & 15 + 5x = 0 \text{ cuando } x = \underline{\qquad\qquad} \end{tikzcd}$$

Vemos que los valores determinados resuelven la ecuación cuadrática propuesta, pero, ¿ambas son soluciones del problema? ____________ ¿por qué? (recuerden que x describe el número de veces que disminuye $100 el precio de la póliza para arreglar los aparatos de aire acondicionado).

____

También se puede rescribir la expresión algebraica como:

$$G = (600 - 100x)(15 + 5x) = 500\,(6 - x)(3 + x)$$

¿Qué información inmediata nos da esta expresión equivalente al igualarla a cero? ____________ Analícenlo con sus compañeros y reflexionen también en las operaciones realizadas para lograr esta expresión equivalente; desarrollen con cuidado la expresión algebraica, es decir, realicen el producto de los factores sin olvidar el 500 que aparece como factor inicial de estos binomios:

$$500\,(6 - x)(3 + x) = 500\,(\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad})$$

$$= \underline{\qquad\quad}x^2 + (\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})\,x + (\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})$$

Al igualar a cero la expresión desarrollada, se tiene que:

$$9\,000 + 1\,500\,x - 500\,x^2 = 0$$

lo cual se simplifica escribiendo una expresión equivalente como:

$$-x^2 + 3x + 18 = 0$$

misma que se obtiene al considerar que los coeficientes de la expresión original son múltiplos de ____________, y como es un número distinto de cero, podemos dividir todos sus términos por ese valor, sin alterar la igualdad.

¿Qué relación perciben entre las soluciones de la ecuación $x_1 = 6$ y $x_2 = -3$ con los coeficientes de la misma donde $a = -1$; $b = 3$ y $c = 18$?

____

En general, se puede determinar la relación que existe entre las raíces de una función cuadrática y los coeficientes de su expresión general, comparando las expresiones (1) y (2):

$$y = a(x - p)(x - q),\ \text{donde } p \text{ y } q \text{ son las raíces y } a = 0 \qquad (1)$$

$$y = ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

En sus cuadernos desarrollen la ecuación (1) y comparen los coeficientes que encuentren en ella con *a*, *b* y *c* de la ecuación (2) y muestren después que $p + q = -\frac{b}{a}$ y que $pq = \frac{c}{a}$. Expliquen este resultado general con sus palabras:

Utilicen estas ideas para determinar las soluciones de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$

____

____

____

PARA HACER

1. El maestro de Física sugiere a un grupo de estudiantes que investiguen el fenómeno de la caída libre de objetos, es decir, que describan cómo cae un cuerpo, suponiendo que no existe fricción del aire. Luego de buscar la información saben que un objeto en caída libre se mueve bajo la única influencia de la atracción gravitatoria (cuyo valor es aproximado a 10 m/seg^2) según la siguiente expresión:

$$h = h_0 - 5t^2$$

donde *h* indica la altura en la que el objeto se encuentra en determinado tiempo (*t*) y h_0 representa la altura inicial del objeto, es decir, la altura que tiene antes de caer por su propio peso.

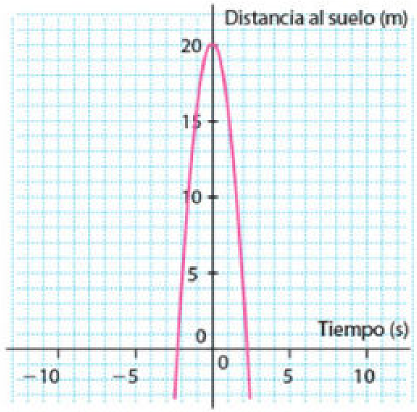
Tiempo (s)	Altura (m)
0	20
0.5	18.75
1	15
1.5	8.75

a) Los estudiantes deciden explorar este fenómeno tirando una pelota desde cierta altura registrando en la tabla de la izquierda los siguientes datos:

¿Desde qué altura tiraron la pelota? _________ ¿Cuál es la expresión algebraica que describe la caída de esta pelota?

____

b) Al no poder recabar más datos deciden utilizar un graficador (por ejemplo, el *software* Geogebra) para observar la gráfica. De esta forma logran determinar el tiempo que tarda en llegar a diferentes distancias del suelo.



Observen con cuidado la gráfica y pinten con otro color la parte de ella que corresponde al fenómeno estudiado. ¿Qué parte de la gráfica no tiene sentido en este fenómeno? _________ ¿Podrían existir dos tiempos distintos en los cuales la pelota toca el suelo? _________ ¿Por qué? _________________

____

c) ¿Cuál sería la expresión factorizada de la caída de la pelota? _________ ¿Qué información nos proporciona la gráfica? _________________________

____

d) ¿Cuántos segundos deben pasar para que la pelota esté a siete metros del suelo? _________ ¿y a cinco metros? _________________

e) Comprueben sus respuestas de los incisos anteriores analizando con sus compañeros y profesor la estrategia seguida para resolver las ecuaciones cuadráticas involucradas en cada caso.

f) De ser posible, realicen la experiencia en la escuela arrojando una pelota desde la mayor altura posible, recabando los datos varias veces para comparar los resultados con los otros estudiantes. Analicen con su profesor y compañeros lo logrado, sintetizando su experiencia en un cartel informativo para colgar en su salón.

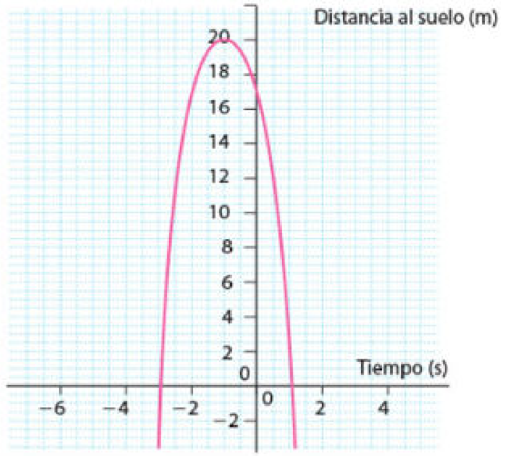
2. Los estudiantes siguen investigando la caída libre y encuentran que si el objeto es empujado hacia abajo con cierta velocidad, la expresión que describe la caída es:

$$h = h_0 - kt - 5t^2$$

donde *k* es una constante relacionada con la velocidad que se le imprime al objeto al dejarlo caer. Luego de varias pruebas, se percatan que la expresión que mejor se ajusta para describir la caída de su pelota desde 15 m de altura es:

$$h = 15 - 10t - 5t^2$$

y al utilizar Geogebra obtienen la siguiente gráfica:



a) Analicen la parte de la gráfica que corresponde al fenómeno estudiado y píntenla de otro color, marcando también los puntos que indica la altura desde la que se arroja la pelota y el momento en el que llega al suelo. ¿Cuál es la altura inicial? _________ ¿Y el tiempo que transcurre para tocar el suelo? _________ Busquen una manera de comprobar sus respuestas y coméntenlas con su profesor.

¿Sabías que?

Galileo Galilei publicó en 1638 el libro: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica*, con los resultados de sus investigaciones sobre mecánica, sentando así bases físicas y matemáticas para el análisis del movimiento. Te recomendamos que explores la página del Museo Virtual Galileo en http://www.museo-galileo.it/ donde podrás observar varios de los artefactos creados por este científico para verificar sus ideas sobre el movimiento.

b) Determinen el tiempo en el cual la pelota se encuentra a ocho metros del suelo; __________ ¿En qué tiempo estará a cinco metros?

c) Los estudiantes observan que pueden rescribir la expresión cuadrática factorizándola de la siguiente manera:

$$h = -5 \cdot (t + 3) \cdot (t - 1)$$

Desarrollen con sus compañeros esta expresión para comprobar que se trata de la expresión inicial. Analicen el significado de cada factor y la información que brinda. Por ejemplo, ¿para qué valores de t, $h = 0$? ____________ ¿Qué estrategia utilizar para encontrarlos? ____________ ¿La expresión factorizada facilita la tarea? ¿Qué opinan? Escriban su conclusión en su cuaderno.

TIC

Utilicen sus calculadoras para comprobar las respuestas que hallen en la Actividad 3 y compárenlas con las de sus compañeros. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

3. Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas, determinen sus soluciones con el método de factorización examinado en esta lección:

a) $2x^2 = 18$

b) $x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 = 5x$

d) $(x - 6)(x + 6) = 13$

e) $x^2 + 12x + 35 = 0$

f) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

g) $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

4. Un deportista caminó 30 km durante cierto número de horas. Si hubiese caminado un km más por hora habría tardado una hora menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuántos kilómetros por hora recorrió?

____

5. Analicen la relación que existe entre los coeficientes *a*, *b* y *c* de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ y su factorización $a(x - p)(x - q) = 0$ utilizando sus soluciones p y q. Argumenten ampliamente sus conclusiones y escriban en sus cuadernos una regla general para hallar las soluciones de este tipo de ecuaciones cuadráticas.

En esta lección han trabajado con expresiones algebraicas cuadráticas y analizaron cómo resolverlas con el método de factorización; es decir, determinaron los valores de la incógnita utilizando la relación existente entre los coeficientes de la ecuación y los valores de sus soluciones. Es importante que resuman en sus cuadernos la forma de determinar las soluciones de ecuaciones cuadráticas del tipo:

a) $ax^2 = c$ y expliquen la estrategia que conviene utilizar para hallar sus soluciones.

Por ejemplo, háganlo para: $3x^2 = 27$

b) $ax^2 + bx = 0$ y la expresen de manera factorizada, determinando sus soluciones y argumentando el proceso seguido. Recuerden que sólo se trata en este caso de extraer como factor común a *x*" entonces: x (_______+_______) = 0

Por ejemplo, háganlo para: $2x^2 + 3x = 0$

c) $ax^2 + bx = c$ y la expresen de manera factorizada, suponiendo que conocen las soluciones; asimismo, establezcan la relación de *a*, *b* y *c* con sus soluciones.

Por ejemplo, háganlo para: $x^2 + 5x = 6$, donde sus raíces son $p = 1$ y $q = -6$.

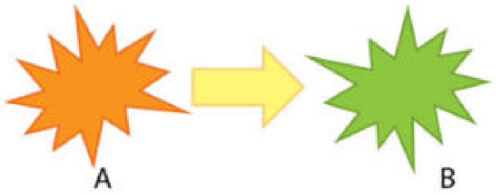
Si la ecuación cuadrática tiene dos soluciones iguales (como $x_1 = x_2 = k$), ¿cuál sería la expresión algebraica factorizada de la ecuación? ¿Cuál sería si x_1 y x_2 son diferentes? ¿Cuál sería su expresión algebraica desarrollada? Argumenten cada caso en su cuaderno y analícenlo con sus compañeros y profesor.

LECCIÓN 2.2

En esta lección realizarás el análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

PARA APRENDER

Actividad 1



GLOSARIO

En Geometría se dice que dos figuras son **congruentes** si hay una transformación rígida que lleva una sobre otra. Rotaciones y traslaciones en el plano, pueden ser interpretadas como transformaciones rígidas.

En una hoja en blanco, calquen la figura A. Recórtenla y sobrepónganla a la figura A de tal manera que ajuste en todas sus partes, a esta nueva figura la llamaremos figura C.

a) Sin levantar la figura C del plano de la hoja, deslícenla y roten la figura C hasta sobreponerla a la figura B de tal manera que coincida en todas sus partes.

b) Las figuras A y C, ¿son **congruentes**? __________

c) Las figuras B y C, ¿son congruentes? __________

d) ¿A partir de este procedimiento podríamos afirmar que las figuras A y B son congruentes? __________

e) Al trasladar y rotar la figura C, ¿sufrió alguna deformación? ______________

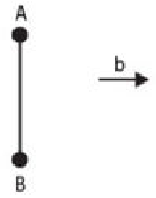
Actividad 2

Tenemos los segmentos de recta AB y A′B′

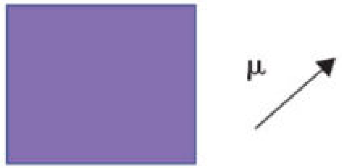
a) Propóngan dos criterios para comprobar que AB y A′B′ son congruentes.

b) Trasladen el segmento AB en la dirección b, 3 cm.

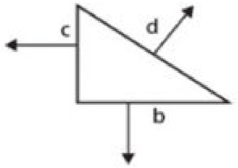
c) Trasladen el segmento AB en la dirección b, 1 cm.



d) Trasladen el cuadrilátero en la dirección μ una cantidad cualquiera.



e) Trasladen el triángulo rectángulo en cada una de las direcciones señaladas. En la dirección b, un centímetro, en la dirección c, dos centímetros y en la dirección d, cuatro centímetros.



Actividad 3

a) ¿Un ángulo es una figura geométrica? Expliquen su respuesta y discútanla con sus compañeros y su profesor. ______________________________

____

b) Euclides dice en uno de sus axiomas, “todos los ángulos rectos son iguales”.

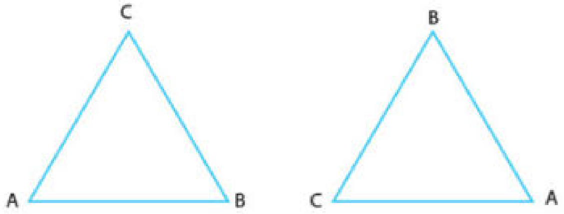
Quiere decir esto que un ángulo recto se puede trasladar. Tomando como base al ángulo recto que se coloca a continuación, en su cuaderno, trasládenlo en la dirección y las unidades que se indican.

Trasladenlo el ángulo recto

Dirección	Unidades
←	2 cm
→	2 cm
↗	2 cm
↖	2 cm

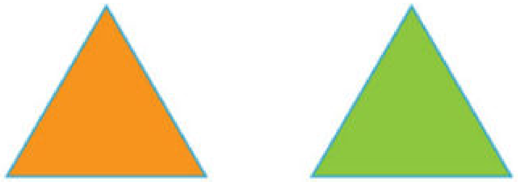
Actividad 4

Tenemos el triángulo equilátero ΔABC en dos posiciones distintas. La posición de la derecha (CAB) se obtiene moviendo el triángulo de la posición inicial (ABC).

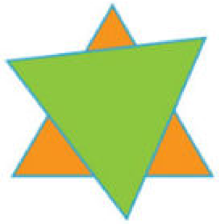


a) ¿Se puede llevar el triángulo ΔABC en la posición (CAB) a través de una traslación? ______________________________

b) El triángulo verde se obtuvo a partir de una traslación del triángulo naranja. ¿Al realizar dicha traslación, identifican algún punto del triángulo naranja que haya quedado sin moverse? ______________________________



c) El triángulo verde se obtuvo como resultado de un giro de 45° del triángulo naranja. ¿Al realizar dicha rotación, identifican algún punto del triángulo naranja que haya quedado sin moverse o fijo? Si es así, señálenlo en la figura.



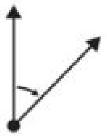
Actividad 5

Notación: P_f denota que en un giro, ese punto queda fijo.

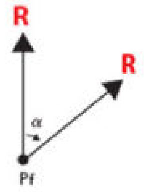
Tenemos la letra **R** en el plano

a) Fijemos un punto en el plano (centro de rotación).

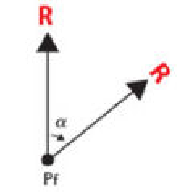
b) Señalemos un ángulo de rotación.



c) ¿Cuál de los dos movimientos señalados abajo es el resultado de la rotación? Expliquen en su cuaderno su elección.



Movimiento 1



Movimiento 1

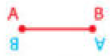
Actividad 6

Denotamos en cada caso el segmento AB inicial con rojo y con azul, el segmento resultante de una rotación.

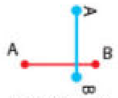
Para cada una de las siguientes rotaciones, identifiquen el centro de rotación señalándolo sobre la figura.

Rotación 1

Rotación 2



Rotación 3

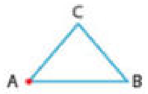


Rotación 4

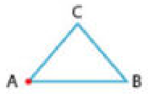
Actividad 7

Roten cada una de las figuras que se dan a continuación en el ángulo y la dirección que se indica. El punto marcado en rojo constituye el centro de rotación en cada caso.

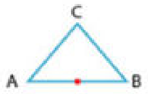
a)



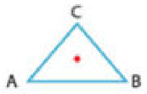
Δ_1



Δ_2



Δ_3



Δ_4

Figura	Movimiento
Δ_1	45° en el sentido de las manecillas del reloj
Δ_2	45° en el sentido contrario a las manecillas del reloj
Δ_3	90° en el sentido de las manecillas del reloj
Δ_4	120° en el sentido contrario a las manecillas del reloj

b)

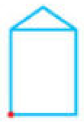


Figura 1

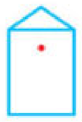


Figura 2

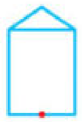


Figura 3

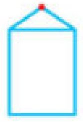


Figura 4

Figura	Movimiento
1	90° en el sentido de las manecillas del reloj
2	180° en el sentido contrario a las manecillas del reloj
3	360° en el sentido de las manecillas del reloj
4	90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj

Una síntesis...

Para realizar una traslación se requiere conocer la dirección y magnitud de la misma.

En las actividades anteriores hemos realizado dos tipos de transformaciones: traslación y rotación. Dichas transformaciones forman parte de lo que se conoce como *transformaciones geométricas*.

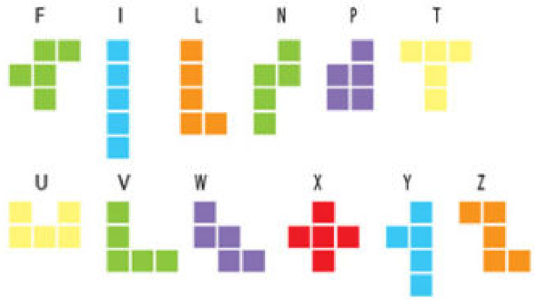
Una característica importante de las transformaciones de rotación y traslación es el hecho de que las figuras sometidas a dichas transformaciones no experimentan deformación alguna.

En las actividades anteriores han trabajado con transformaciones y empleado términos como dirección, magnitud, ángulo, sentido. Repasando las actividades analicen estos términos con sus compañeros e indiquen cuáles son los aspectos que se deben considerar para realizar...

- una traslación
- una rotación

a) Elijan tres imágenes que llamen su atención en cada una de las direcciones de internet que han explorado, y que correspondan a transformaciones de rotación y traslación. Cópienlas y péguenlas en su cuaderno explicando sus características como transformaciones geométricas.

b) ¿Les dicen algo las siguientes figuras?



¿Se podría afirmar que el juego de Tetris se basa en trasformaciones de traslación y rotación?

¿Qué tipo de traslaciones y qué tipo de rotaciones? Expliquen con detalle en su cuaderno.

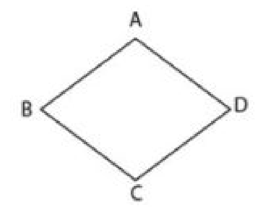
c) Con un compañero ingresen en Internet a un juego de Tetris. Anoten cuántas traslaciones y rotaciones debieron de realizar para ganar el primer juego (jugando el nivel más básico).

TIC

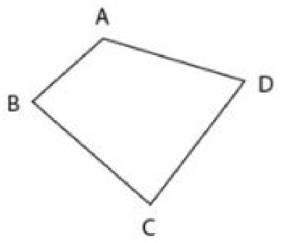
Exploren en un buscador de Internet, como Google, ejemplos de traslaciones y rotaciones. Escriban, por ejemplo, en el explorador: "Imágenes de figuras con traslaciones geométricas, e imágenes de figuras con rotaciones geométricas". Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

LOS MÉTODOS

a) ¿Qué pasos se deben realizar para trasladar el cuadrilátero ABCD en una dirección 30° a partir de la horizontal, la cantidad de 3 cm? ______________________________



b) ¿Qué pasos se deben realizar para rotar el cuadrilátero ABCD respecto al punto C? ______________________________

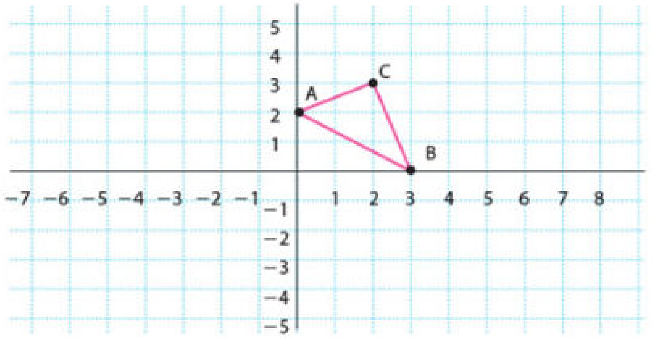


c) ¿Qué pasos se deben realizar para rotar 60° el cuadrilátero ABCD del inciso b) respecto al punto *o*?

____

PARA HACER

1. Tomando como referencia los ejes coordenados, tenemos el triángulo ΔABC de coordenadas (0,2), (3,0) y (2,3), trasladen el triángulo en la dirección y las unidades que se indican, señalando las nuevas coordenadas en cada caso.

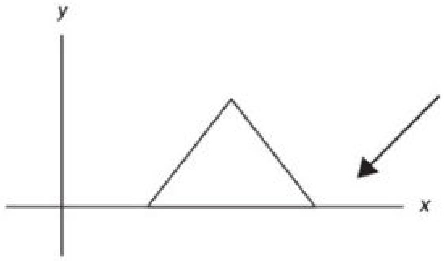


Traslación	Nuevas coordenadas de los vértices
a) 2 unidades hacia la derecha	(,), (,), (,)
b) 1.5 unidades hacia la izquierda	(,), (,), (,)
c) 3 unidades hacia arriba	(,), (,), (,)
d) 2 unidades hacia abajo	(,), (,), (,)

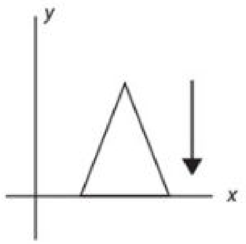
Nota: En el ejercicio anterior se hicieron traslaciones (derecha, izquierda, arriba, abajo), ahora realizaremos otras traslaciones, pero poniendo atención en dos elementos: la dirección en la que se realiza la traslación y la magnitud o unidades de dicho desplazamiento. Para plantear dichas traslaciones lo haremos a través de una flecha (la orientación será la que indica la flecha y su magnitud o tamaño del desplazamiento, el tamaño de la flecha).

2. Auxiliándos de escuadras y compás, realicen las traslaciones que se indican en cada caso, respetando la dirección de la flecha y la longitud o magnitud de la misma.

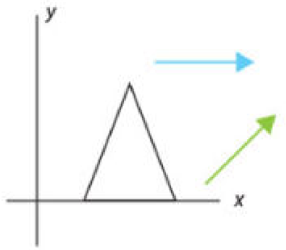
a)



b)



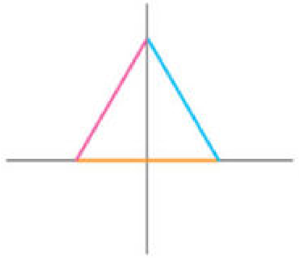
3. Observen la siguiente figura que tiene dos traslaciones: una marcada con una flecha azul y la otra, con una flecha verde hagan lo que se pide.



a) Realicen primero la traslación azul y, a la nueva posición del triángulo que obtengan, apliquen la traslación señalada con la flecha verde. Dibujen en su cuaderno el resultado de realizar ambas traslaciones.

b) ¿Se obtendrá el mismo resultado si se aplica primero la traslación verde y luego la traslación azul?

4. Para el triángulo equilátero que se muestra a continuación, realicen las rotaciones que se indican, tomando el origen de coordenadas como centro de rotación.



a) 0° en el sentido de las manecillas del reloj.

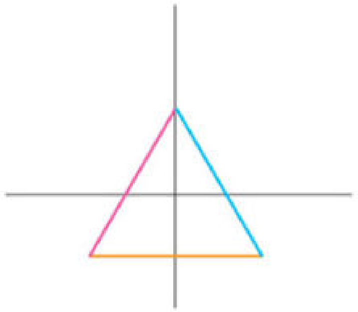
b) 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

c) 180° en el sentido de la manecillas del reloj.

d) 180° en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

e) 360° en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

5. Para el triángulo equilátero que se muestra a continuación, realicen las rotaciones que se indican, tomando el origen de coordenadas como centro de rotación.



a) 0°.

Todos los giros siguientes se harán en el sentido de las manecillas del reloj.

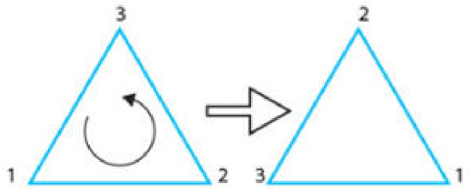
b) 45°
c) 90°
d) 120°
e) 180°
f) 240°
g) 270°
h) 360°

¿Hay algún movimiento en que la figura coincida consigo misma?, ¿cuál?

____

6. Tenemos el triángulo equilátero de vértices 1, 2, 3.

a) ¿Cómo debemos rotar el triángulo equilátero que se da a continuación para que...

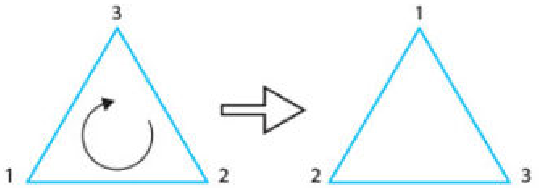


i. el vértice 1 se convierta en el vértice 2.
ii. el vértice 2 en el vértice 3.
iii. y el vértice 3 sea ahora el vértice 1.

Es decir que el △ (1, 2, 3) se transforme en el △(3, 1, 2).

b) Siguiendo con la misma idea, ¿qué rotación transformaría el △(1, 2, 3) en el △(2, 3, 1)?

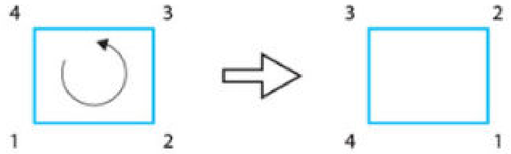
En otras palabras…



¿Hay otra rotación que produzca el mismo efecto? ______________________

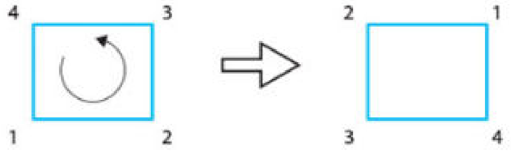
7. Siguiendo el mismo criterio del ejercicio anterior, ¿qué rotaciones hay que efectuar para hacer las transformaciones del cuadrado que a continuación se indican?

a) ¿Qué rotación transforma el cuadrado (1, 2, 3, 4) en el cuadrado (4, 1, 2, 3)?, ¿puede haber otra rotación que produzca el mismo efecto? Expliquen su respuesta. ______________________



b) ¿Qué rotación transforma al cuadrado (1, 2, 3, 4) en el cuadrado (3, 4, 1, 2)?

____



c) ¿Hay una rotación que produzca el mismo efecto? Expliquen su respuesta.

____

En esta lección, al analizar los movimientos de rotación y traslación, entraron a un conjunto de ideas geométricas que se denominan *transformaciones rígidas del plano*. Estas transformaciones nos permiten explorar nuevas propiedades matemáticas con sólo mover figuras, por tal razón dichas transformaciones se convierten en una herramienta simple y poderosa para crear matemáticas.

LECCIÓN 2.3

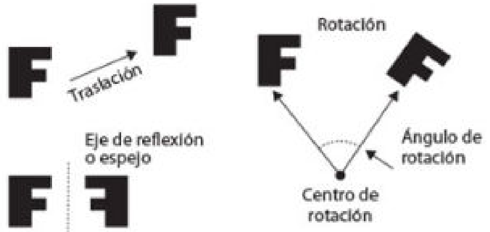
En esta lección realizarás construcciones de diseños que combinan la simetría axial y central, así como la rotación y traslación de figuras.

PARA APRENDER

Si tenemos la letra F en el plano, podemos jugar con ella haciendo uso de **transformaciones geométricas**.

GLOSARIO

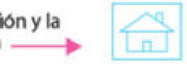
En el plano, se denominan **transformaciones geométricas** rígidas a aquellas transformaciones que no deforman las figuras, es decir, sólo mueven a la figura pero no cambian ninguna de sus medidas. Como no hay variación alguna, a estas transformaciones también se les conoce como isométricas (igual medida). Tal es el caso de las traslaciones, reflexiones y rotaciones.



Actividad 1

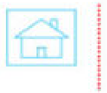
Para cada una de las figuras que se dan a continuación, dibujen el efecto de la transformación que se indica.

Trasladen en la dirección y la magnitud de la flecha



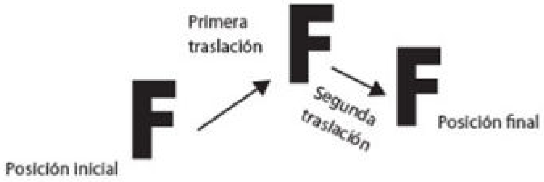
Roten un ángulo de 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj, siendo el punto rojo el centro de rotación

Reflejen respecto al eje punteado



Actividad 2

Tenemos la composición de dos traslaciones. El resultado de esta composición es una nueva transformación. ¿Qué tipo de transformación se obtiene?

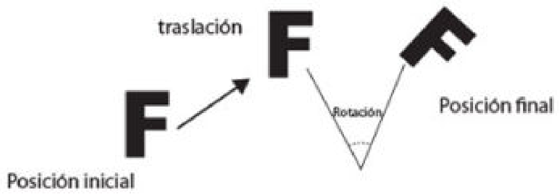


Actividad 3

Aplicamos la **composición de dos transformaciones** a la letra **F**, primero una traslación y posteriormente una rotación.

GLOSARIO

La **composición de dos transformación** es la transformación que resulta de aplicar sucesivamente dos transformaciones a una figura geométrica.



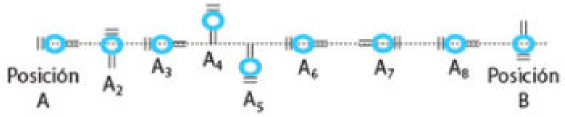
Como observarás, la letra F quedó en una nueva posición en el plano. Observen con atención la posición inicial y la posición final de la letra F.

Conjetura: ¿qué tipo de transformación geométrica lleva a la letra F de posición inicial a la posición final que se indica? ¿Una rotación? ¿Una traslación? Argumenten su conjetura y discútanla con sus compañeros. ____________________________________

Actividad 4

En colaboración con otro compañero hagan lo que se indica:

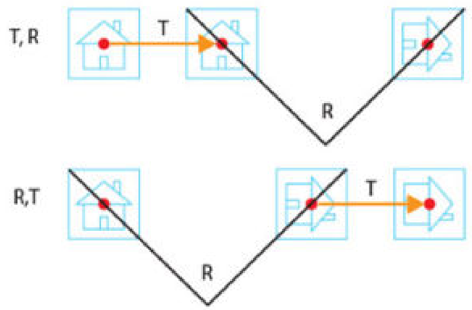
Dada la figura  en la posición A, describan en la tabla de abajo la sucesión de transformaciones geométricas que hay que efectuar para llegar a la posición final B.



Transición	Transformación o transformaciones
A pasa a A_2	
A_2 pasa a A_3	
A_3 pasa a A_4	
A_4 pasa a A_5	
A_5 pasa a A_6	
A_6 pasa a A_7	
A_7 pasa a A_8	
A_8 pasa a B	

Actividad 5

Exploren las dos composiciones que se dan de una misma figura. En el primer caso se da una composición de transformaciones. En el segundo caso se cambia el orden de dicha composición.



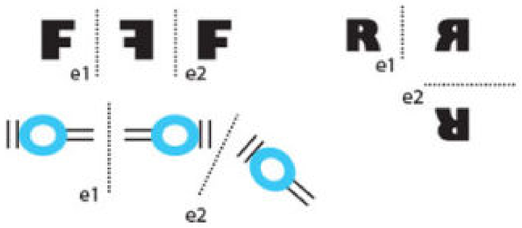
a) Si a la composición de una traslación seguida de una rotación le cambiamos el orden de aplicación de dichas transformaciones, ¿se obtiene la misma transformación geométrica? Analicen y discutan esto con sus compañeros y escriban sus conclusiones en su cuaderno.

b) Dibujen en su cuaderno otro caso similar con el fin de corroborar las conclusiones a las que llegaron.

Actividad 6

Las tres figuras que se dan a continuación se han sometido a una composición de reflexiones, donde e1 y e2 denotan ejes de reflexión.

Analicen con sus compañeros cada composición y respondan las preguntas que a continuación se formulan.



a) Poniendo atención en la disposición de los ejes, ¿qué se puede decir de los ejes de simetría o reflexión en cada uno de los casos?

____

b) Para cada situación establezcan una conclusión, indicando qué tipo de transformación es el resultado de la doble reflexión. Justifiquen su respuesta.

GLOSARIO

Decimos que una figura es **simétrica**, si es posible aplicarle ciertas isometrías que denominaremos operaciones de simetría, que dejan a la figura entera sin alteración mientras permutan sus partes.
Estas operaciones pueden ser, rotaciones, reflexiones y la identidad.

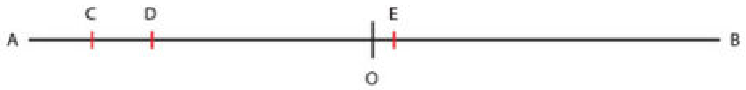
Una síntesis...

En una transformación rígida, llamamos punto fijo al que no se mueve bajo dicha transformación.

Transformación	**/**	**mueve**	**/**	**Características**
Traslación	K	→	K	No tiene puntos fijos
Rotación	K	→	ʞ	Tiene un punto fijo
Reflexión	K	→	ꓘ	Sus puntos fijos son el eje de reflexión
Identidad	K	→	K	Sus puntos fijos son todos los puntos

LOS MÉTODOS

1. Tomemos el segmento AB y designemos por *O* el punto medio del segmento AB.



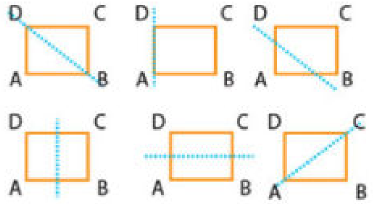
a) Decimos que los puntos A y B equidistan del punto O. ¿Qué significa esto?

____

Se dice que el punto B es el simétrico de A respecto del punto O.

b) Marquen sobre el segmento AB, los puntos simétricos de C, D, E, respecto de O. Al punto *O* se le denomina *centro de simetría*.

2. A continuación se muestran distintas rectas trazadas sobre un mismo rectángulo ABCD.



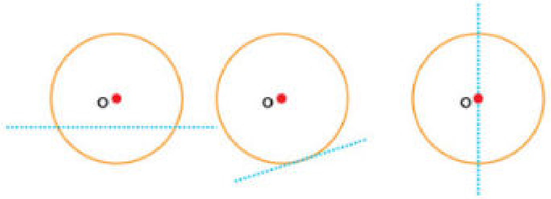
a) ¿Cuáles de dichas rectas dividen al rectángulo en dos partes congruentes? Expliquen su respuesta. ______________________________

b) A partir de la respuesta del inciso anterior señalen aquellas rectas que sean ejes de simetría del rectángulo.

c) Para cada eje de simetría encuentren al menos tres pares de puntos simétricos.

d) ¿Qué punto podría ser un centro de simetría en el cuadrado? Señálenlo.

3. Sobre la circunferencia con centro en O se han trazado tres rectas distintas.



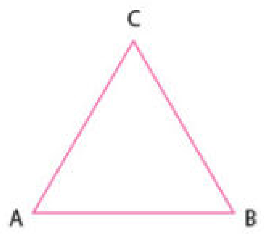
a) ¿Cuáles rectas dividen a la circunferencia en dos partes congruentes? Expliquen su respuesta. ______________________________

b) A partir de la respuesta del inciso anterior, señalen aquellas rectas que sean ejes de simetría de la circunferencia.

c) Para cada eje de simetría encuentra al menos tres pares de puntos simétricos.

d) ¿Qué punto podría ser un centro de simetría en la circunferencia? Señálenlo.

4. Dado el triángulo equilátero ΔABC, lleven a cabo lo que se solicita.



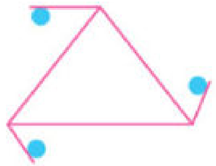
a) Tracen sobre el triángulo todas las rectas que lo dividan en dos partes congruentes.

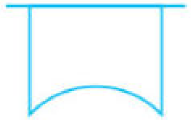
b) A partir de la respuesta del inciso anterior, señalen las rectas que sean ejes de simetría del triángulo.

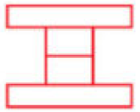
c) Para cada eje de simetría encuentren al menos tres pares de puntos simétricos.

d) ¿El triángulo equilátero admite un centro de simetría? Expliquen su respuesta. ____

5. Para cada una de las siguientes figuras, indiquen si admiten las transformaciones simétricas que se proponen. Analicen cada caso con sus compañeros.







De las tres figuras que se dan, podemos decir:

i. que una de ellas admite un eje de simetría o que tiene simetría axial,

ii. otra de ellas únicamente tiene simetría de rotación o un centro de simetría,

iii. por último, la figura restante admite las dos simetrías (la axial y la de rotación).

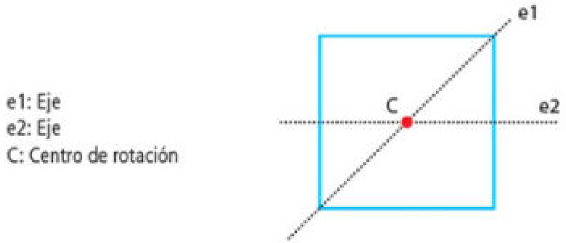
¿A qué figura se refiere cada una de las afirmaciones? Justifiquen su respuesta.

____

PARA HACER

1. El cuadrado admite ocho transformaciones simétricas, es decir, ocho movimientos que permiten que al moverlo quede sin cambios. En el cuadrado de abajo mostramos dos ejes de simetría y el centro de rotación. Dibujen los ejes de simetría faltantes y describan las ocho simetrías que admite el cuadrado.

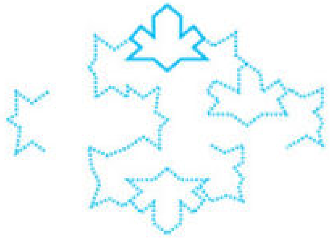
____



2. A partir de la figura base  se construyó un adoquinado de la región que abajo se muestra. Empleando distintos colores, señalen las diferentes disposiciones en que se repite la figura con el fin de rellenar la región; además, describan para cada caso qué transformaciones geométricas se deben efectuar para alcanzar ese propósito. ____________________________________

____

____



En esta lección analizaron la noción de transformación geométrica, en particular se examinaron las transformaciones de traslación, rotación y reflexión. Aprendieron que dichas transformaciones son rígidas, es decir, no deforman las figuras y, por lo tanto, conservan todas sus medidas; por ello también se conocen como transformaciones isométricas. También conocieron un tipo de transformaciones que al ser aplicado a una figura tiene la característica de que dejan a la figura, sin cambio alguno, esto tiene estrecha relación con las características geométricas de las figuras pues aquellas admiten en sí mismas ejes y centro de simetría, dichas transformaciones se llaman simetrías.

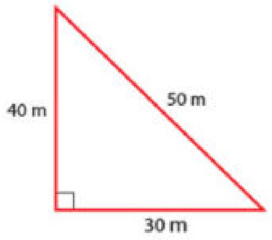
LECCIÓN 2.4

En esta lección identificarás la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

PARA APRENDER

Actividad 1. Los terrenos vecinos (Primera parte)

Bartolo cultiva hortalizas en un terreno triangular como el de la figura adjunta. Su propiedad colinda con tres terrenos cuadrangulares, dos de ellos pertenecen a José, el otro, a Patricia. Los terrenos de José limitan con los lados menores de la propiedad de Bartolo y el de Patricia, con el lado mayor. Con la ayuda de su juego de geometría o de algún software (como el de Geogebra) representen en su cuaderno el terreno de Bartolo y los de sus vecinos.



Enseguida, analicen en equipo las construcciones que realizaron. Tengan en cuenta preguntas como las siguientes:

- ¿Qué tipo de triángulo representa el terreno de Bartolo?
- ¿Cuál es la medida del área del terreno de Patricia?
- ¿Cuánto mide el área de cada terreno de José?

Compartan sus resultados con el resto de los equipos, analicen y expliquen la estrategia que usaron para representar las propiedades de los tres vecinos. ¿Cuál de los tres terrenos que colindan con el de Bartolo es más grande? __________ ¿Cuál es el más pequeño? Argumenten su respuesta. ______________________________

Actividad 2. Los terrenos vecinos (Segunda parte)

José y Patricia pusieron a la venta sus terrenos a un costo de $450.00 el metro cuadrado. Bartolo está interesado en comprarlos para diversificar sus cultivos. Sabe que su sobrino Francisco está en tercero de secundaria, por ello le pidió ayuda con un informe pormenorizado de la inversión que hará por la compra. En equipo, ayuden a Francisco con el informe, considerando las preguntas siguientes:

- ¿Cuánto pagará Bartolo a Patricia por su propiedad?
- ¿Qué cantidad de dinero recibirá José por sus dos terrenos?
- ¿Cuál será el monto de la inversión de Bartolo en la compra de los tres terrenos?
- ¿Quién de los dos vecinos posee la mayor cantidad de terreno? ___________ ¿Quién de los dos recibirá más dinero por la venta de sus propiedades? ¿Por qué?

Al elaborar el informe para su tío, Francisco reconoció que las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo, como el que representa el terreno de Bartolo, guardan una relación particular entre sí, ¿cuál es esa relación?, identifíquenla y escríbanla en su cuaderno. Compartan sus resultados con el resto de los equipos y valídenlos con su profesor.

Actividad 3. Análisis de terrenos con otras dimensiones

Francisco quiere saber si la relación que reconoció entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de este tipo de triángulos se cumple en todo tipo de triángulo. Para ello, elaboró una tabla con varias medidas posibles de las longitudes del terreno de su tío, el de Patricia y los de José.

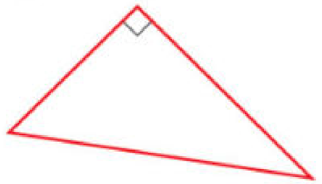
Longitudes de los lados del terreno de Patricia	Longitudes de los lados de los terrenos de José	
	Terreno 1	Terreno 2
15	9	12
22	12	14
25	13	20
13	6	12

Elaboren en equipo un dibujo del terreno de Bartolo, Patricia y José, con las nuevas dimensiones propuestas por Francisco; utilicen su juego de geometría o un software libre (como el Geogebra). Ahora, analicen y expliquen qué relación guardan entre sí las medidas de las áreas de los terrenos de Patricia y de José bajo estas nuevas condiciones, ¿Se mantiene la relación que identificaron en la actividad anterior? _________ ¿Por qué sucede esto? ______________________________

Enseguida, compartan sus resultados con el resto de los equipos y valídenlos con su profesor.

Una síntesis…

En esta lección reconocieron una relación matemática entre la medida de las áreas de los cuadrados que se construyen sobre un triángulo rectángulo. Escriban en su cuaderno una expresión algebraica que exprese la relación matemática que identificaron. Tengan en cuenta el siguiente triángulo.

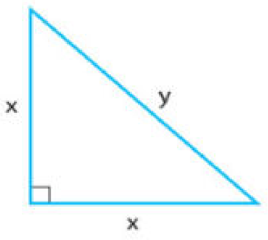
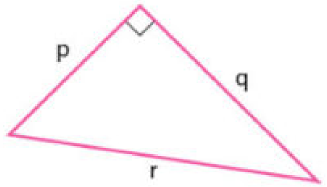


Expresión algebraica: ______________________________

(Lean nuevamente el problema planteado en la Actividad 1 de la Lección 1.5, a fin de analizar las relaciones matemáticas que se establecen en un triángulo rectángulo.)

LOS MÉTODOS

Copien en su cuaderno los triángulos rectángulos de los casos 1 y 2 y sobre sus lados construyan, en equipo, unos cuadrados cuyos lados tengan por medida la misma que los lados de cada triángulo. En cada caso, describan y expresen la relación matemática que guardan entre sí la medida de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados menores, respecto del mayor.

Caso 1	Relación entre las áreas de los cuadrados
	Expresión matemática:
Caso 2	**Relación entre las áreas de los cuadrados**
	Expresión matemática:

PARA HACER

1. En la siguiente tabla aparecen las medidas de las longitudes de los lados de cuadrados construidos sobre los lados correspondientes a cuatro triángulos diferentes.

Casos	Longitudes de los lados de los cuadrados		
1	12	16	20
2	8	7	14
3	5	12	13
4	7	5	6

a) Analicen en qué caso los cuadrados están construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Argumenten su respuesta.

b) A partir del análisis previo y tomando en cuenta los datos, verifiquen si se cumple la expresión matemática que dieron.

2 A partir de los valores de la siguiente tabla, determinen el valor de *x*, *m* y *p*, de manera que los datos correspondan a la medida de los lados de triángulos rectángulos. Justifiquen su respuesta.

Casos	Medida de los lados de triángulos rectángulos		
	Lados menores		Lado mayor
Triángulo 1	x	9	15
Triángulo 2	55	m	73
Triángulo 3	9	9	P

A partir de cada uno de los valores que determinaron, escriban la expresión matemática que indique la relación que se establece entre las medidas de las áreas de los cuadrados construidos sobre los triángulos rectángulos.

3. Con el apoyo de su juego geométrico, construyan los triángulos de la Actividad 1 de esta sección. Con base en dichas construcciones, expliquen:

a) ¿Qué tipo de triángulos se forman con los datos que no cumplen la relación que identificaron en los triángulos rectángulos?

En esta lección continuaron su estudio de las relaciones matemáticas que se cumplen en los triángulos, particularmente en el triángulo rectángulo. Investiguen, en un libro especializado, cómo se le llama a los lados de un triángulo rectángulo y por qué a la relación matemática que identificaron en este tipo de triángulos se le conoce como Teorema de Pitágoras.

LECCIÓN 2.5

En esta lección aprenderás a explicitar y usar el Teorema de Pitágoras.

PARA APRENDER

Formen equipos para discutir y analizar las actividades de esta lección con base en lo que han aprendido hasta ahora sobre los triángulos y sus propiedades. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. Para construir triángulos rectángulos

Para continuar el estudio sobre las propiedades de triángulos rectángulos, el profesor de matemáticas de tercer año propuso a sus estudiantes completar los datos de la siguiente tabla, con el fin de que verifiquen si es posible su construcción. En equipo, incorpórense a la actividad. Consideren la información proporcionada en cada línea que se relacione con la medida de los lados de los triángulos y la medida del área de los cuadrados que se construyen sobre ellos.

Medida de los lados de los triángulos			Medida del área de los cuadrados			Argumenten si es posible trazar un triángulo rectángulo
x	y	z	x^2	y^2	z^2	
4	7	8				
3	4	5				
5	4	8				
2	6	6				
7	24	25				

a) A partir de las conclusiones a las que arribaron en cada caso, describan las características que deben tener las medidas de los lados de un triángulo para garantizar que éste sea rectángulo.

____

b) Si dos lados de un triángulo miden 20 y 21 cm respectivamente, ¿qué medida debe tener el tercer lado para que el triángulo sea rectángulo? Describan la estrategia que siguieron.

____

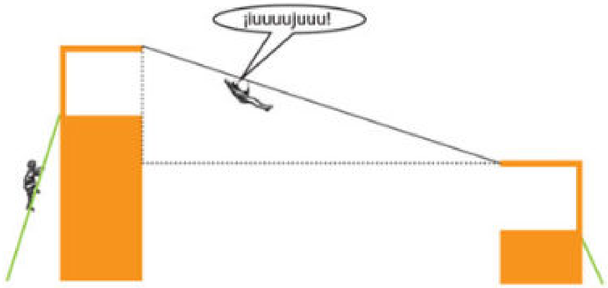
c) Analicen ahora el caso cuando las medidas de los lados de un triángulo son 9 y 12 cm. ¿Qué medida deberá tener el tercer lado para que el triángulo sea rectángulo? Propongan otras medidas de lados. ¿Su estrategia funciona siempre? ________ ¿Por qué? ______________________________

d) ¿Qué características deben tener x^2, y^2, z^2 para que el triángulo sea rectángulo? Justifiquen su respuesta. ______________________________

Actividad 2. Un problema de altura (Primera parte)

Con motivo de las festividades del día del estudiante, los alumnos de tercer año acordaron construir, con ayuda de su profesor, una tirolesa en el parque central de su comunidad. Esto planteó un reto para ellos, ya que no contaban con un instrumento de medición que les ayudara a obtener la medida de la cuerda de desplazamiento. Lo único que sabían era que la base de partida tenía una altura de 15 m, la de llegada 7 m y la distancia entre ambas era de 50 m.

Para orientarlos en la solución del problema, su profesor les facilitó el siguiente dibujo:



Analicen en equipo el problema con ayuda del dibujo elaborado por el profesor. Apóyense de las preguntas siguientes y encuentren una solución viable.

a) ¿Cuál es la medida de cada una de las líneas imaginarias (líneas punteadas) del dibujo?

____

b) ¿Qué tipo de triángulo puede considerarse que se forma con las líneas punteadas y la cuerda de deslizamiento? ___________ ¿Por qué? ________________

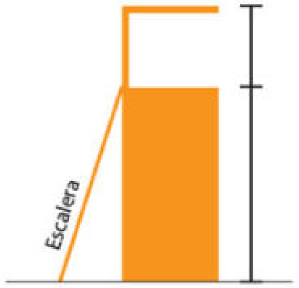
____

c) ¿Qué característica del triángulo que se forma puede ayudar a conocer la medida de la cuerda de deslizamiento para la tirolesa? ___________ ¿Por qué? ______________________________ Encuentren esta medida.

Elaboren en su cuaderno un informe detallado de la estrategia que siguieron para encontrar la medida de la cuerda de deslizamiento. Compartan sus resultados con los demás equipos. ¿Todos obtuvieron las mismas respuestas? ___________ ¿Por qué? ______________________________

Actividad 3. Un problema de altura (Segunda parte)

El director de la secundaria visitó a los estudiantes del proyecto para verificar aspectos de seguridad. Al revisar sus informes, pregunto: ¿Cómo saben que la altura de la base de inicio mide 15 metros? Uno de los estudiantes le mostró el esquema siguiente:



Medimos la parte superior con una cinta métrica y obtuvimos una medida de tres metros.

No pudimos medir con la cinta métrica esta parte, pero el carpintero nos aseguró que había construido la escalera de 13 m de longitud. Colocamos esta escalera de tal manera que quedara exactamente a la altura que queríamos medir y después medimos la distancia del pie de la escalera a la base de inicio, obteniendo cinco metros de longitud.

Analicen en equipo el dibujo del estudiante para determinar cuál fue la estrategia utilizada para conocer la altura de la base de inicio de la tirolesa. Consideren las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de figura puede formarse con la base de inicio, la escalera y la distancia entre éstas dos? Dibújenla en su cuaderno considerando una escala pertinente. ¿Qué características tiene esta figura?

____

b) ¿Qué característica de la figura considerada puede ayudar a conocer la altura de la parte de la base que no puede ser medida con la cinta métrica?

____

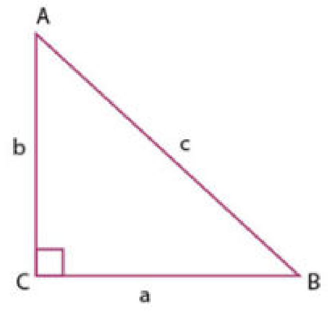
c) ¿Cuál es la estrategia que utilizaron los estudiantes de tercer grado para encontrar la medida de la altura de toda la base de inicio?

____

Una síntesis...

En las actividades anteriores establecieron una relación entre los catetos de un triángulo rectángulo y su correspondiente hipotenusa. Esta relación, conocida como **Teorema de Pitágoras**, se enuncia de la forma siguiente:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



En todo triángulo rectángulo, la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto (ángulo cuya amplitud es de 90º) y los **catetos** son cada uno de los dos lados que forman el ángulo recto.

Con base en la información del triángulo rectángulo *ABC* siguiente, indiquen:

Qué lado es la hipotenusa: ____________

Qué lados son los catetos: ____________

A partir de ello, expresen la relación que establece el teorema de Pitágoras.

Esta expresión es la que se usará en adelante para referirse al Teorema de Pitágoras.

En esta lección también aprendieron que esta relación permite resolver diferentes problemas, como los relacionados con la determinación de distancias entre lugares inaccesibles. Para ello, suele recurrirse a la elaboración de un modelo que considere las propiedades de los triángulos rectángulos y sus relaciones. Investiguen con su equipo diferentes situaciones reales en donde dicha relación se utilice, así como la manera en que se emplea. Escriban en su cuaderno al menos dos situaciones como las que se les piden.

LOS MÉTODOS

El Teorema de Pitágoras tiene una importancia fundamental dentro de la matemática dado que permite establecer una relación muy particular entre los lados de un triángulo rectángulo, lo cual plantea la posibilidad de conocer la medida de la hipotenusa conociendo la medida de los dos catetos, o bien, conocer la medida de uno de los catetos conociendo la de la hipotenusa y el otro cateto. Resuelvan las tres situaciones que a continuación se presentan.

Cómo calcular la hipotenusa

¿Cuál es la medida de $\overline{BC}$?

____

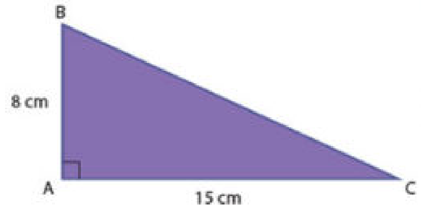
Método de solución:

____

____

____

____



Cómo determinar un cateto

____

Método de solución:

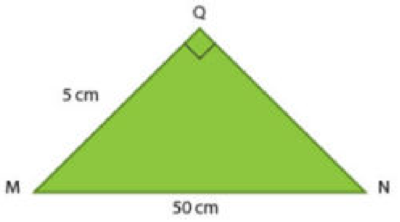
____

____

____

____

____



¿Cuál es la medida de $\overline{AB}$?

____

Método de solución:

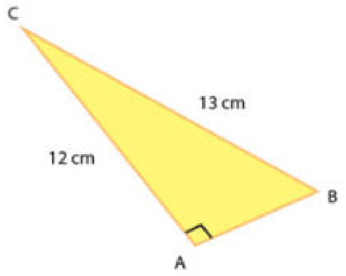
____

____

____

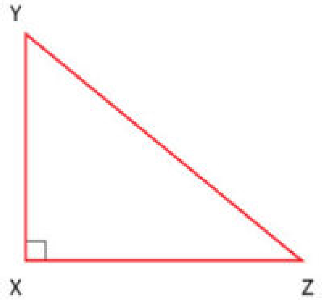
____

____



PARA HACER

1. Consideren el triángulo rectángulo XYZ, donde $\overline{XY} = 5.5$ cm y $\overline{XZ} = 6.5$ cm. Encuentren la medida de su área y perímetro. ______________________



2. El tamaño de una pantalla de televisión se mide a partir de la longitud en pulgadas de su diagonal. Si un televisor mide 110.69 cm de ancho y 62.26 cm de alto, ¿cuál será el tamaño de la pantalla?

3. Un hombre que gusta de practicar *rapel* realizó un experimento singular. Le interesaba conocer cuál debió ser la altura de un edificio inclinado (por cuestiones ambientales) cuando éste estaba completamente vertical. Así que tomó una de sus cuerdas de entrenamiento y se lanzó de manera vertical hasta el suelo. Enseguida midió la cantidad de cuerda que utilizó para deslizarse desde la punta del edificio, hizo otra medición en el suelo y realizó unas cuentas en un cuaderno. Al final miró a sus amigos y dijo: "Utilicé 35 m con 3cm de cuerda, el edificio debió tener una altura aproximada de 36 m cuando estaba completamente vertical".

a) ¿Cómo supo este hombre la altura del edificio? ______________________

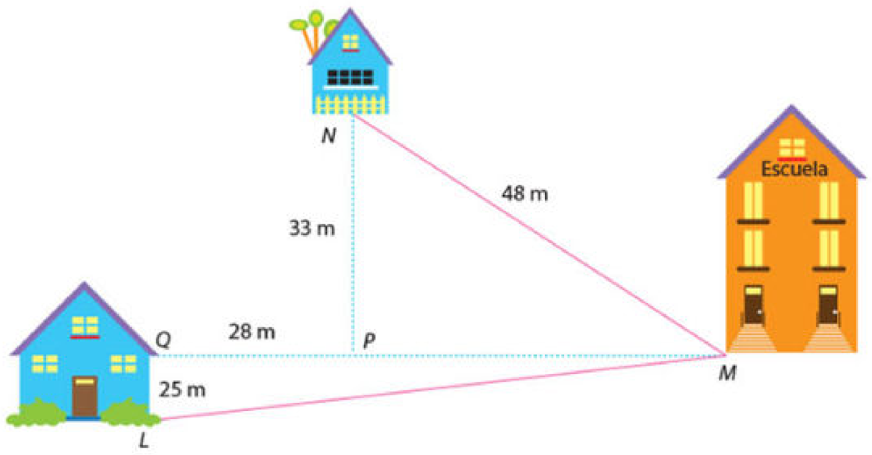
____

b) ¿Cuál fue el resultado de la medición que hizo en el suelo? ______________

4. Dos estudiantes van a la misma escuela todos los días y el recorrido de su casa a la escuela lo hacen caminando.

a) Determinen la distancia que recorre cada uno si el estudiante que vive en *N* sigue el camino *NPM* y el que vive en *L* sigue el camino *LM*. ____________________

b) ¿Qué estudiante hace el recorrido más largo? ________________________

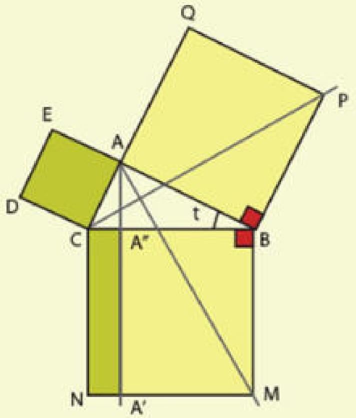


A lo largo de esta lección explicitaron y usaron una de las propiedades más importantes de los triángulos rectángulos: el Teorema de Pitágoras; también conocieron algunas de sus aplicaciones tanto en el ámbito matemático como en la vida cotidiana. Contesten en su cuaderno lo siguiente: ¿qué es lo que expresa el Teorema de Pitágoras?, ¿por qué este teorema no puede ser aplicado a triángulos que no son rectángulos?

En equipo elaboren un ensayo explicando la importancia de este teorema en la resolución de problemas geométricos. Proporcionen ejemplos que justifiquen sus argumentos.

¿Sabías que?

En la proposición 47 del Libro I de los Elementos de Euclides, aparece la relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (Euclides 1991, p. 260). En su demostración, Euclides se apoya de una figura como la adjunta y prueba (o demuestra), que las áreas representadas con el mismo color son iguales (Figura tomada de http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm).



Para conocer más acerca del Teorema de Pitágoras, se sugiere consultar la página del Centro virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española: http://www.divulgamat.net/ (consultadas en octubre de 2013)

LECCIÓN 2.6

En esta lección aprenderás sobre la probabilidad de que ocurran dos eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios.

PARA APRENDER

Actividad 1. El partido de fútbol

Al inicio de un partido de fútbol, entre el equipo rojo y el equipo azul, se lanza una moneda al aire. El capitán del equipo rojo, por ser el local, elige entre sol o águila. Si gana el volado puede escoger entre:

Evento A: dar el saque inicial.

Evento B: elegir el lado de la cancha en el que quiere comenzar a jugar.

a) ¿Qué probabilidad tiene el equipo rojo de ganar el volado si elige águila? __________, y ¿qué probabilidad si elige sol? ______________________________

b) Si gana el volado el equipo rojo y elige dar el saque inicial, ¿puede elegir el equipo azul cualquiera de las dos opciones (evento A o evento B)? ¿De qué depende esta posibilidad? Reúnanse en equipo y expliquen su respuesta en su cuaderno.

c) En general, ¿un mismo equipo puede dar el saque inicial y elegir el lado de la cancha? ________________ ¿Qué características tienen los eventos A y B? Explíquenlas en su cuaderno ampliamente.

Reúnanse en equipos y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre lo siguiente:

1. ¿Cómo es la probabilidad de que el equipo rojo gane el volado respecto a la probabilidad de que lo pierda, considerando que el espacio muestral es E = {sol, águila}?
2. ¿Qué probabilidad tiene el equipo azul de ser quien elija entre el evento A y el evento B? ¿Puede el equipo azul dar el saque inicial y elegir el lado de la cancha en el que quiere comenzar a jugar? ¿Cómo caracterizarían el evento A y el B?

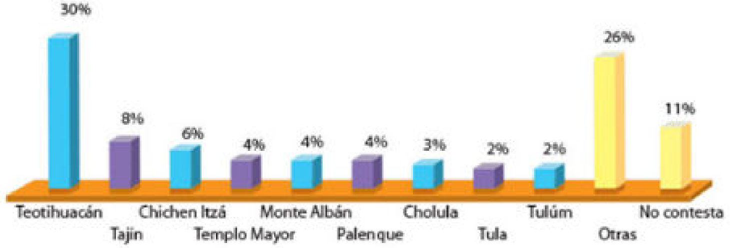
Coméntenlo con el resto del grupo; resulta muy importante escuchar las características de los eventos que haya distinguido cada equipo.

GLOSARIO

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio; regularmente se denota con E o S. Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar dos monedas, el espacio muestral es E: {(sol, sol), (sol, águila), (águila, sol), (águila, águila)}.

Actividad 2. Visita de zonas arqueológicas

Según Conaculta, las zonas arqueológicas más visitadas en 2010 fueron las siguientes:



Fuente: http://www.conaculta.gob.mx/recursos/banners/ENCUESTA_NACIONAL.pdf (consultada el 3 de diciembre de 2012)

GLOSARIO

Conaculta: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

1. ¿Puede suceder que al seleccionar una persona de las que fueron entrevistadas ésta haya visitado Chichén Itzá y Palenque? ________________ ¿Por qué? ______

   ____

2. La población entrevistada fue de 400 personas y ninguna visitó más de un lugar; De acuerdo a la información de la gráfica respondan lo siguiente:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una persona al azar sea la que visitó Tulúm, Palenque o el Templo Mayor? Justifiquen su respuesta.

   ____

   b) Si un experimento es "visitar una zona arqueológica", ¿cuál es el espacio muestral? Argumenten su respuesta, y explique cómo lo determinaron.

   ____

3. Reúnanse en equipos y respondan en su cuaderno lo siguiente.

   Si se considera cada visita a una zona arqueológica como un evento, éstos:

   - ¿Son eventos complementarios? ¿Por qué? Si son complementarios, ¿cuál o cuáles son los eventos complementarios del evento A: *Visitó el Templo Mayor*? ¿Cuál o cuáles son los eventos complementarios del evento B: *Visitó Tajín*? Expliquen ampliamente la relación de estos eventos.
   - ¿Son eventos mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A? ¿Cuál la probabilidad de que ocurra el evento B?
   - ¿Son dependientes el evento A y el evento B ? ¿Por qué? Si son dependientes, ¿de qué manera se da esa dependencia?
   - ¿Son eventos independientes? ¿Por qué?

Comenten con el resto del grupo sus respuestas y digan aquello que les ayudó a distinguir el tipo de evento a los que se refiere, pueden apoyarse en la tabla que hicieron en el Bloque 1 de la Lección 1.6. De manera grupal respondan, ¿los eventos mutuamente excluyentes pueden ser más de dos?, ¿el complemento de un evento A es equivalente a la no ocurrencia de dicho evento?

TIC

Para consultar la Encuesta Nacional de hábitos, prácticas y consumos culturales 2010 de Conaculta pueden ingresar a: http://www.conaculta.gob.mx/recursos/banners/ENCUESTA_NACIONAL.pdf (consultada el 3 de diciembre de 2012) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Actividad 3. Para continuar mis estudios

Roberto está cursando el tercer año de secundaria y quedan pocos meses para su graduación, así que está revisando sus posibilidades de ingreso a un bachillerato. Las evaluaciones serán en unos meses, pero sólo se puede presentar examen de admisión en un solo bachillerato. Sabiendo que se graduará con un promedio de 8.3 y que espera obtener una beca que le ayude a continuar sus estudios, deberá elegir el bachillerato donde presentará examen. Las opciones son:

- El Bachillerato Tecnológico. Se encuentra a tan sólo unas cuadras de distancia. Para tener posibilidad de hacer examen se solicita que el aspirante tenga un promedio mínimo de 8.5. No pide ningún pago.
- La Preparatoria No. 1. Ofrece beca a sus estudiantes que mantengan un promedio mínimo de 8. Ésta se encuentra a 50 minutos viajando en autobús.
- El Bachillerato a distancia. Brinda estudios en línea. No requiere viajar, dado que no es presencial, y no requiere un mínimo de promedio para su ingreso. Sólo requiere de colegiaturas mensuales de $800.

Reúnanse en equipos y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Roberto puede elegir cualquiera de las tres escuelas? Expliquen ampliamente por qué. ____

b) ¿Cuál es la mejor opción de bachillerato para que Roberto presente examen de ingreso? ______________ ¿Cuáles fueron las características que consideraron? Argumenten sus respuestas y coméntenlas con los otros equipos. ______

____

¿Todos coinciden? ______ ¿Por qué? ________________________

c) ¿Cuál es la principal razón para que el Bachillerato Tecnológico sea o no la mejor opción de Roberto? ________________________________

De manera grupal respondan y reflexionen sobre la situación de Roberto:

Sean el evento A: Presentar la evaluación de ingreso y el evento B: Ingresar al bachillerato elegido, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A? ________ ¿Cuál de que ocurra el evento B? ________ ¿Son estos eventos dependientes, uno del otro? Comenten entre todos con ayuda de su profesor. ______________

Actividad 4. La gasolinera[1]

Mediante una encuesta se ha determinado que la probabilidad de que un cierto número de automóviles formen una línea de espera en una bomba particular de una gasolinera es:

	Evento A	Evento B	Evento C	Evento D
Número de automóviles en la fila	0	1	2	3 o más
Probabilidad	0.08	0.16	0.30	0.46

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en la fila haya a lo más un automóvil?

____

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la fila haya al menos dos automóviles?

____

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en la fila haya a lo más dos automóviles?

____

d) ¿Cuál es la diferencia entre la pregunta del inciso *b)* y la del inciso *c)*?

____

Reúnanse en equipos y respondan lo siguiente.

e) ¿Puede ocurrir el evento B y el evento D al mismo tiempo? ________ ¿Por qué?

____

f) ¿Cuál es el evento o los eventos complementarios del evento C? ¿Y cuál o cuáles del evento A?

____

De manera grupal comenten sobre cómo se relacionan los eventos A, B, C y D.

---

[1] Hernández-del-valle, A. y Hernández-Lerma, O. (2003). Elementos de probabilidad y estadística, p. 90, México: Textos 21.

Una síntesis…

Hay situaciones que no pueden ocurrir a la vez, por ejemplo, que al lanzar una moneda caiga águila y a la vez caiga sol; a estos eventos se les denomina *eventos mutuamente excluyentes*. En estas actividades pudiste distinguir las principales características de los eventos mutuamente excluyentes, así como de los eventos complementarios.

¿Cuándo dos eventos son complementarios?, ¿por qué importa conocer el espacio muestral?, ¿se podría mencionar el evento complementario de otro sin conocer el espacio muestral del experimento? Comenten entre todos y respondan en su cuaderno.

LOS MÉTODOS

La probabilidad de que ocurra un evento *A* la denotaremos como *P*(*A*). Para calcularla se hace lo siguiente:

Para calcular *P*(*A*), se considera la relación entre el número de resultados favorables del evento, el cual denotaremos por *n*, y el número total de resultados posibles del experimento, al que denotaremos *N*, a saber:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Ejemplo. Al lanzar un dado común de seis caras, enumeradas del 1 al 6, la probabilidad de obtener un número par es del 50%, o bien, de 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar? ____________________

Entonces,

el espacio muestral de este experimento es: ________________________

Otro ejemplo de un experimento aleatorio: tirar un dado. Sea el evento *A*: *Salga un 5 o 6* y al evento *B*: *Salga un 1, 2 o 3*. Ahora calculen la probabilidad de que ocurra uno u otro evento. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A? ________ ¿Cuál de que ocurra el evento B? ________ Ahora, ¿cómo se calcula la probabilidad si se espera que ocurran ambos eventos? ________

La probabilidad de que ocurra el evento *A* o que ocurra el evento *B*, para eventos mutuamente excluyentes, se obtiene con la suma de estas probabilidades. Es decir, con la regla de la adición: *P*(*A*) + *P*(*B*).

Este caso es del mismo tipo que analizaste en la Actividad 4 *La gasolinera*, cuando se preguntó "¿Cuál es la probabilidad de que en la fila haya a lo más dos automóviles?", ¿qué estrategias usaste para responder? ____________________

Por otro lado, dado el evento *A*, se llamará no *A* al evento de que "no ocurra *A*", dichos eventos son mutuamente excluyentes. Se puede decir que un evento es el complementario del otro? ________ ¿Por qué? Argumenten su respuesta. ________

____

____

Se tiene entonces que:

La suma de las probabilidades de dos *eventos complementarios* da como resultado

____.

$P(A) + P(\text{no } A) =$ ________

En equipos de tres compañeros completen la siguiente tabla que resume las principales características de los eventos mutuamente excluyentes y complementarios, básense en las actividades que realizaron anteriormente.

Experimento	**Tipo de eventos y principal característica**	**Espacio muestral del experimento**	**Si son complementarios, ¿cuál es el evento complementario del evento A?**
Tirar una moneda al aire. Evento A: *Caiga sol* Evento B: *Caiga águila*	Son eventos ____________ Porque no pueden ocurrir los dos eventos al mismo tiempo.	E: { ____, ____ }	
	No son mutuamente excluyentes.		
Tirar un dado y una moneda al aire. Evento A: *Salga un número par en el dado.* Evento B: *Salga sol en la moneda.*			
			Los eventos complementarios del evento A son el evento B y el evento C.

Compartan sus respuestas con los demás equipos y deduzcan las principales características de los eventos mutuamente excluyentes y complementarios. Como una puesta en común, expongan entre todos los ejemplos que generaron en la primera columna y cuestionen a sus compañeros sobre qué responderían en las otras tres columnas, tomando en cuenta al ejemplo propuesto.

PARA HACER

1. En el salón de Hipólita se organizó una rifa entre los 30 estudiantes. Cada uno tiene asignado un número del uno al 30.

   Luego, en una urna se pusieron 30 papelitos correspondientes a los 30 números y se sacó un papel al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el premio alguien que tiene un número par? __________ ¿Cuál de que gane alguien que tiene un número primo? __________ ¿Cuál de que gane alguien que tenga un múltiplo de cuatro?

   ____

   a) ¿Cuál es el evento complementario de que se obtenga un número primo? __________ Y ¿cuál es la probabilidad de que éste ocurra? ____________________

   b) Mencionen dos eventos que sean complementarios. ____________________

   ____

   ¿Son los únicos o puedn proponer tres eventos complementarios? Justifiquen su respuesta. ____________________

   ____

2. Si de un experimento aleatorio se tienen los eventos A y B, y se sabe que son complementarios y que los resultados favorables del evento A son {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

   a) Propón un experimento que determine los eventos planteados. __________

   ____

   b) ¿Cuál es la condición que puede representar al evento A? __________

   ____

   c) ¿Cuáles son los resultados favorables del evento B, si se sabe que sólo contiene 10 elementos? ____________________

   d) ¿Son éstos, eventos complementarios? ________ ¿Qué te hace determinar eso? ____________________

3. En la escuela secundaria "Nicolás Bravo" del estado de Chihuahua se inició una campaña de salud, por lo que desea tener información sobre la actividad física de sus estudiantes. Se entrevistaron a 570 estudiantes. Entre las preguntas estaba: ¿Haces deporte por salud o por diversión? Los entrevistados sólo pueden elegir una de las dos opciones.

   La cantidad de entrevistados que respondieron que hacían deporte por salud fueron 216 mujeres y 118 hombres.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado elegido al azar sea hombre y haga deporte por diversión? ________ Y ¿cuál que sea mujer y haga deporte por la misma razón? ____________________

   b) Formen equipos de tres personas y respondan lo siguiente. Consideren los eventos:

   Evento A: Seleccionar a una mujer entrevistada

   Evento B: Seleccionar a un hombre entrevistado

   Evento C: Seleccionar a una persona que haga deporte por diversión

   Evento D: Seleccionar a una persona que haga deporte por salud

   - ¿Son los eventos A, B, C y D complementarios entre ellos? ________ Expliquen por qué. ____________________
   - Según los datos, ¿puede haber una mujer que haga deporte por diversión y por salud? __________ Expliquen por qué. ____________________
   - ¿Son los eventos A y B complementarios? ________ Expliquen por qué.

     ____

- ¿Son los eventos A y C complementarios? _________ Expliquen por qué.

____

De manera grupal compartan sus respuestas y reflexionen sobre la principal característica que pudieron observar en estas últimas actividades para los eventos complementarios y para aquellos eventos que su resultado depende de otro.

En esta lección trabajaron con diversas situaciones que les permitieron diferenciar aquellos eventos que son mutuamente excluyentes de los que no lo son, así como distinguir los complementarios. Reflexionen en grupo, ¿qué características deben considerarse para distinguir a aquellos eventos que son mutuamente excluyentes de aquellos que no lo son? Para esto, ¿de qué manera influye el espacio muestral del experimento?

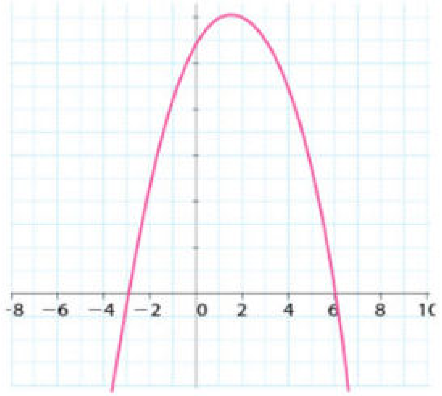
Comenten en grupo sus reflexiones y propongan una manera sencilla de identificar el tipo de eventos que puede generar un experimento aleatorio. Al finalizar, respondan lo siguiente en su cuaderno: dados dos eventos cualesquiera, ¿siempre se cumple que si son mutuamente excluyentes son complementarios? ¿Por qué? Si no siempre se cumple, ¿bajo qué condiciones no se cumple?

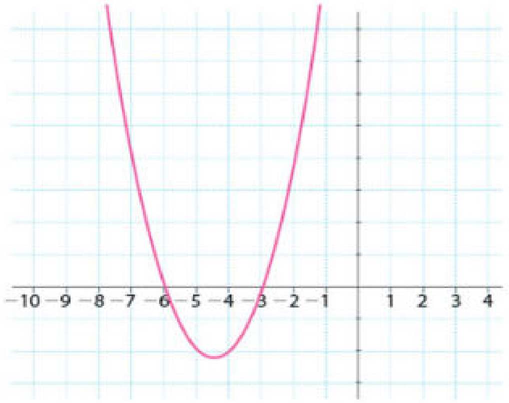
EVALUACIÓN

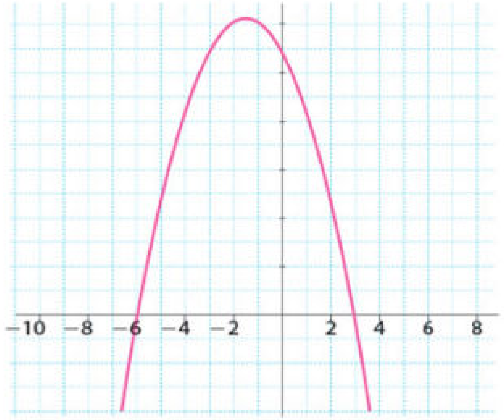
1. **Ahora con gráficas**

En la Actividad 3 de la Lección 2.1, determinaste la relación algebraica que describía la ganancia semestral de don Mateo. Analiza las siguientes gráficas y encierra la que representa el comportamiento de la ganancia semestral de don Mateo. Da un argumento matemático sobre tu elección.

Analiza las siguientes gráficas y encierra la que representa el comportamiento de la ganancia semestral de don Mateo. Da un argumento matemático sobre tu elección.





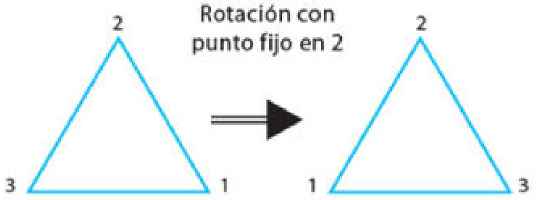


b) ¿En cuánto se tiene que disminuir la póliza para que don Mateo obtenga la mayor ganancia?

2. **Transformaciones**

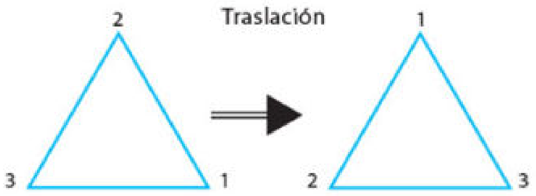
a) Dadas las siguientes secuencias indica si la transformación indicada en cada una es la que se aplicó para obtener la segunda figura. Escribe un argumento de tu respuesta.

i.



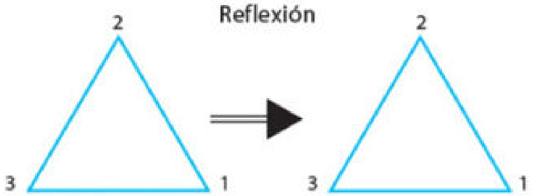
____

ii.



____

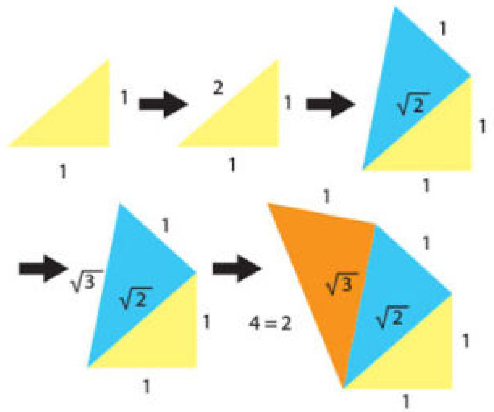
iii.



____

3. **Secuencias de colores**

Se presenta a continuación una secuencia que permite determinar segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etcétera.



a) Continúa el proceso cinco veces más y explica si la estrategia de construcción de estos triángulos siempre funciona.

4. **Sin disco, sin juegos**

Una empresa de videojuegos adquirió un lote de discos compactos con estuche a bajo precio. El vendedor comentó que un lote como ése, probablemente contenga discos de diferente calidad: alta o media. Al hacer una indagación; además, la empresa descubrió que en el lote hay estuches que no contienen ningún disco compacto. Las probabilidades de cada caso se mencionan a continuación.

Sean los eventos y sus respectivas probabilidades:

Evento A: encontrar un disco compacto de alta calidad	P(A) = 0.50
Evento B: encontrar un disco compacto de calidad media	P (B) = 0.20
Evento C: encontrar un estuche vacío	P(C) = 0.30

a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar algún disco compacto? ____________________

b) ¿Cuáles son los eventos complementarios a los eventos A, B y C, respectivamente? Escríbelos y calcula la probabilidad de cada uno. ____________________

c) Se considera la ocurrencia de dos eventos de los anteriores y se obtiene que su probabilidad es cero. ¿Qué par de eventos son? ____________________

d) ¿Cuál es la diferencia principal de considerar la ocurrencia de un par de eventos (A, B o C) al mismo tiempo y de considerar la ocurrencia de uno u otro del mismo par?

Autoevaluación

Reflexiona acerca de lo que has aprendido en este bloque para resolver los problemas anteriores. Completa esta tabla considerando una escala del 1 al 5, donde 1 es "Totalmente en desacuerdo" y 5 "Totalmente de acuerdo".

Utilicé en la resolución de situaciones	Logré comprender y aplicar los conocimientos al resolver situaciones con	Usaría en la vida cotidiana lo que aprendí con
alguna transformación (reflexión, rotación o traslación) para obtener una figura final.		
el Teorema de Pitágoras para resolver problemas que implican su uso.		

Coevaluación

Con un par de compañeros intercambien sus evaluaciones, comenten y comparen las respuestas que propusieron en ellas y analicen las coincidencias y diferencias. Preparen una explicación para cada problema de la evaluación y conviertan sus inquietudes o dificultades en preguntas para compartirlas con el grupo y su profesor. Reflexionen también, con sus compañeros y profesor, sobre lo vertido en la tabla de autoevaluación. Es importante compartir tus dificultades y tus fortalezas con tus compañeros; aprovechen ese espacio para aclarar cada duda que tengan y consolidar sus conocimientos.

Los invitamos a que después del debate completen una tabla que sea producto del consenso del grupo. Esta experiencia les servirá para consolidar sus aprendizajes antes de pasar al siguiente bloque.

BLOQUE 3

¿Alguna vez te han dicho que te pareces a alguien de tu familia? Esta pregunta siempre se refiere a observar las características que tienen en común dos personas. Comenta con un compañero en qué eres semejante a la persona de tu familia a la que más te pareces. En Matemáticas, al estudio de la similitud entre objetos se le llama *semejanza*. Estos objetos pueden ser figuras como los triángulos, en los que la comparación consiste en observar en qué son semejantes y en qué no. En la imagen de abajo, ¿en qué son semejantes las dos personas que aparecen? Apóyate también en el diseño geométrico.

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Figura y diseño geométrico

LECCIÓN 3.1

En esta lección aprenderás a resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas y a aplicar la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

PARA APRENDER

Formen equipos para analizar las actividades de esta lección donde examinarán diferentes situaciones en las cuales será necesario determinar expresiones algebraicas cuadráticas que describan los fenómenos involucrados y encuentren sus soluciones.

Actividad 1. Recordando estrategias para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática

Ante el desafío de determinar las soluciones de una ecuación, siempre es importante analizar las estrategias que ya hemos utilizado con éxito en otros casos. En actividades anteriores hemos resuelto varias situaciones que involucraban ecuaciones cuadráticas. Con base en la siguiente tabla lleven a cabo lo que se les pide a continuación.

a) Unan cada ecuación con la o las estrategias que consideren más adecuadas para hallar las soluciones y argumenten ampliamente su decisión.

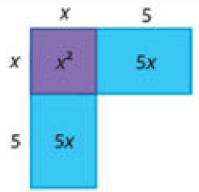
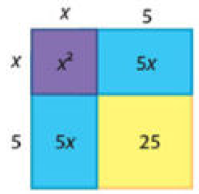
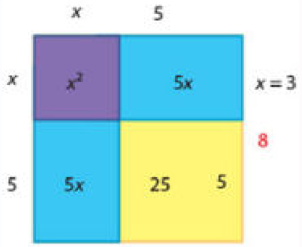
b) Determinen las soluciones utilizando la estrategia escogida y comenten los pasos que siguieron en la resolución.

c) Analicen con sus compañeros y profesor las estrategias mencionadas en esta actividad y generen ejemplos para cada caso.

Ecuación	Estrategias a utilizar
a) $7x^2 = 63$ b) $2x^2 - 4x - 6 = 0$	• Analizar los coeficientes de la ecuación ($ax^2 + bc + c = 0$) y utilizar la relación: $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$; $\frac{c}{a} = x_1 x_2$ para determinar las soluciones x_1 y x_2.
c) $2(x - 1)(x + 2) = 0$	• Despejar incógnita y usar la raíz cuadrada
d) $x^2 + x = 0$	
e) $(2x - 4)^2 = 0$	• Observar los factores y determinar las soluciones
f) $(x - 3)^2 = 9$	• Factorizar la expresión y determinar las soluciones

Actividad 2. Un poco de historia

Desde la Antigüedad, determinados personajes idearon herramientas matemáticas para estudiar y resolver ciertas situaciones. Por ejemplo, Diofanto (científico griego que vivió entre el 200 y el 290 a.n.e.) es muy respetado por sus estudios sobre problemas que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado. Analizó las expresiones $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ y $ax^2 + c = bx$, las cuales nosotros llamamos ecuaciones cuadráticas, pero en su época eran arreglos diferentes al no tener noción del cero o de los números negativos, ni tampoco tenían forma de expresarlos. Siglos después, Al-Khwarizmi (matemático árabe que vivió aproximadamente entre los años 790 y 850) fue de los primeros en utilizar la palabra Álgebra, en uno de sus libros en el que proporciona diferentes maneras de determinar la incógnita de expresiones cuadráticas. Un ejemplo muy conocido es el siguiente:

Traducción de texto original[1]	Interpretación geométrica	Escritura actual
Un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Haz pues para ello una superficie cuadrada de lados desconocidos, que es el tesoro que queremos conocer, así como su raíz. … Queremos añadirle diez de sus raíces. Dividimos entonces diez en dos mitades y resulta cinco…		$x^2 + 10\,x = 39$ $x^2 + 2(10/2)\,x = 39$ $x^2 + 5x + 5x = 39$
Nos queda por tanto (…) un cuadrado que es de cinco por cinco, que es la mitad de diez raíces que habíamos añadido en las partes de la primera superficie. Sabemos que la primera superficie es el tesoro y que las dos superficies que están sobre sus dos partes son diez de sus raíces, y que todo es treinta y nueve, y que falta para completar la figura más grande el cuadrado de cinco por cinco. Éste es veinticinco, que añadimos a treinta y nueve para completar la superficie más grande (…). Se obtiene de todo esto sesenta y cuatro.		$x^2 + 5x + 5x + 25 = 39$ $+ 25 \quad = 64$ Es decir: $(x + 5)^2 = 64$
Tomamos su raíz, que es un lado de la superficie más grande, que es ocho. Si le quitamos lo mismo que le habíamos añadido, que es cinco, queda tres, que es el lado del cuadrado inicial que es el tesoro, y por tanto es su raíz, y el tesoro es nueve.		$64 = 8{*}8$ o $(x + 5)^2 = 8^2$ $8 - 5 = 3 \quad x + 5 = 8$ $3 \quad x = 3$ $9 \quad x^2 = 9$

a) Analicen con cuidado la propuesta de Al-Khwarizmi para hallar la incógnita apoyándose en el área de cuadrados y rectángulos. ¿Encontró todas las soluciones posibles de esa ecuación de segundo grado? Discútanlo y argumenten su respuesta ampliamente en su cuaderno.

b) Utilizando las ideas del árabe Al-Khwarizmi resuelvan las siguientes ecuaciones:

- $x^2 + 14x = 32$
- $x^2 + 4x = 60$
- $4x^2 + 20x = 25$

c) Determinen en su cuaderno las soluciones de $x^2 + rx = s$ considerando a *r* y *s* números positivos.

d) Busquen información sobre Diofanto y Al-Khwarizmi y preparen un informe para compartir con sus compañeros y profesor.

Actividad 3. La fórmula

Para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma más general: $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

---

[1] Ideas tomadas de Puig, L. (2011). *Historias de Al-Khwarizmi* (7a. entrega). Figuras y demostraciones. *Suma* 68, pp. 93-102.

TIC

Busquen en internet la página de la Televisión Educativa que la SEP propone explorar: http://www.televisioneducativa.gob.mx/index.php/videos-telesecundaria (consultada en octubre de 2013) y en ella, seleccionen el video: *Resolución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general*, en la sección de Bloque 3 Matemáticas. Analicen la información y discútanla con su profesor. Pueden intentar realizar su propio video sobre el tema. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

a) En la ecuación $x^2 + 8x - 9 = 0$

Vemos que $a = 1$ $b = 8$ $c = -9$

Y sus soluciones: $x_1 = 1$ $x_2 = -9$

Utilicen la fórmula para comprobar que son las soluciones de la ecuación dada.

b) Reúnanse en equipo y determinen el valor o valores de *x* utilizando esta fórmula para cada inciso y anoten las respuestas en sus cuadernos.

- $7x^2 + 9x + 2 = 0$
- $x^2 + 7x + 10 = 0$
- $x^2 - x - 6 = 0$

c) Comprueben las soluciones que determinaron en la Actividad 2 mediante la estrategia de Al-Khwarizmi, usando ahora esta fórmula.

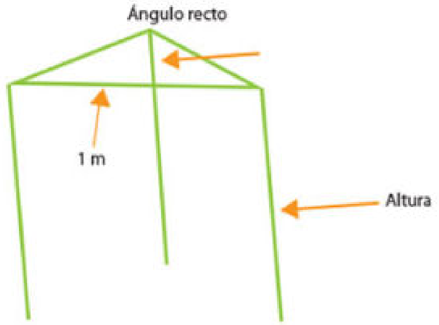
d) Lean la Actividad 1 de la Lección 2.1 y, utilizando esta fórmula, vuelvan a calcular el número de lados de un polígono que tiene 27 diagonales y comprueben la respuesta que dieron en aquella oportunidad.

e) Utilizando esta fórmula encuentren las soluciones de la ecuación $x^2 + rx = s$ y compárenlas con la solución general que determinaron en el inciso c) de la Actividad 2. Analicen con sus compañeros y profesor las similitudes y diferencias halladas.

Actividad 4. Cómo construir un bote para recolectar material *pet*

Datos de la UNAM aseguran que cada mexicano consume al año, en promedio, siete kilos de pet, cifra que se traduce en más de 780 000 toneladas a nivel nacional.[2] Ante esta información, la directiva de una escuela desea hacer conciencia en sus estudiantes sobre el cuidado de nuestro planeta. Varios profesores deciden invitar a sus estudiantes a participar en un proyecto ecológico, delegándoles a ellos el diseño de los botes de recolección de *pet*. Deben entonces decidir la forma, tamaño, cantidad y material que necesitarán para construirlos.

1. Los estudiantes analizan la posibilidad de que el bote tenga la forma de la esquina de una pared, construyendo un triángulo rectángulo con varillas de acero y tres varillas adicionales soldadas en los vértices para sustentarlo a cierta altura. Hay que tener en cuenta que los lados deben formar un ángulo recto, de manera que los extremos se encuentren a un metro uno del otro. La escuela les proporciona una varilla de acero de 6.1 m de largo por lo que deciden que la altura del bote sea de 1.3 m.



a) Calculen la medida de los lados del triángulo. ____________________

---

[2] Fuente: http://www.expoknews.com/2012/10/09/reciclaje-de-pet-en-mexico/

b) ¿Utilizaron toda la varilla o generó desperdicios? ____________________

c) Analicen con sus compañeros si es adecuada la capacidad que tiene el bote que proponen los estudiantes para recolectar el *pet* en su escuela.

2. Analicen con sus compañeros otras formas y tamaños para los botes de recolección de *pet*, utilizando varillas de acero de 6.1 m de largo. ¿Qué tipo de botes propondrían para su escuela?

____

Una síntesis...

Varias son las estrategias y formas para resolver ecuaciones de segundo grado; es decir, para determinar el par de soluciones o valores de la incógnita. A veces es suficiente con despejar *x* utilizando la raíz cuadrada de manera directa; tal es el caso de $x^2 = 10$ o con un poco más de trabajo en una ecuación como $7x^2 - 51 = 2$. ¿Cuáles son sus soluciones? Determínenlas.

____

Puede ocurrir que la expresión cuadrática sea del tipo $ax^2 + bx = 0$ como la que trabajamos en la Lección 2.1, donde se obtiene el factor común y se vuelve a escribir la expresión: de la forma $x(ax + b) = 0$, lo que evidencia sus dos soluciones:

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $3x^2 - 0.15x = 0$? Determínenlas.

____

TIC

Para analizar el uso de la fórmula general en otros problemas, ingresen en la página de la SEP: http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/gis y hagan clic en la pestaña "índice de reactivos" y busquen los reactivos 24 y 25. Resuélvanlos y compartan con otros compañeros sus soluciones y dudas (consultada en abril de 2013). Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Se complica la determinación de las soluciones de una ecuación cuadrática del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, donde despejar *x* requiere varios pasos que se deben realizar para establecer la fórmula general que utilizamos en la Actividad 3. Reúnanse con sus compañeros y busquen en Internet alguna página que explique el procedimiento para determinar la fórmula general y la presenten en clase para analizarla con su profesor.

LOS MÉTODOS

La forma general de una ecuación de segundo grado con una incógnita es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como en toda ecuación, hallar sus soluciones significa encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad, lo cual se puede realizar utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para ello, es importante que:

1. Identifiquen el valor de los coeficientes *a*, *b* y *c* que corresponden a la fórmula general de una ecuación de segundo grado.

Por ejemplo, en $5x^2 - 3x + 1 = 0$ tenemos que $a =$
$b =$
$c =$
o en $10 - x^2 = 0$ tenemos que $a =$
$b =$
$c =$

¿Sabías que?

Al-Jwarizmi (~780-850) fue bibliotecario, astrónomo, matemático entre otras cosas y generó ingeniosos procedimientos matemáticos para resolver ecuaciones cuadráticas inspirándose en la traducción de la obra *Elementos de Euclides*, realizada por un colega de la Casa de la Sabiduría.

Si les interesa conocer más sobre este personaje, hallarán información en el Centro Virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española: http://divulgamat2.ehu.es/ (consultada en septiembre de 2013)

2. Analicen el radicando $b^2 - 4ac$ para predecir cuántas raíces tendrá la ecuación estudiada.

Caso *a)* Si $b^2 - 4ac > 0$

Ejemplo: $x^2 + 4x - 12 = 0$

Solución:

Entonces la ecuación tendrá ________________ soluciones porque
____
____
____

Caso *b)* $b^2 - 4ac = 0$

Ejemplo: $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Solución:

Por tanto las soluciones serán ________________ porque
____
____
____

Caso *c)* $b^2 - 4ac < 0$

Ejemplo: $x^2 + 4x + 10 = 0$

Solución:

Si el radicando es negativo, entonces la ecuación *no* tiene solución. Recordemos que sólo se puede aplicar la raíz cuadrada a números positivos o al cero. Cuando se trata de un radicando negativo, la solución serán *números complejos* con los que se encontrarán en cursos de matemáticas más avanzados.

3. Reemplacen el valor de los coeficientes (*a*, *b* y *c*) en la fórmula general.
4. Efectúen reducción de términos (operaciones aritméticas).
5. Indiquen el valor o los valores para la incógnita.

Sigan los pasos sugeridos para determinar las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

PARA HACER

1. Resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.
   - *a)* $x^2 - 9 = 0$
   - *b)* $x - 2x^2 = 7$
   - *c)* $(x - 1)^2 = 2$
   - *d)* $x^2 - 9x + \frac{4}{3} = 0$
   - *e)* $5x^2 - 6 = x$
   - *f)* $3x^2 + 5x = 0$

¿Qué ecuaciones cuadráticas de esta actividad se pueden resolver sin necesidad de utilizar la fórmula general?

____

2. Formulen la ecuación correspondiente para los siguientes problemas y resuélvanla en su cuaderno por el método de la *fórmula general*.
   - *a)* Determinen la edad de una persona, sabiendo que si al cuadrado de su edad se le resta el quíntuple de la misma, resulta 10 veces ésta.
   - *b)* Hallen las dimensiones de un rectángulo cuyo lado mide 2 cm menos que el otro y su diagonal mide 10 cm.
   - *c)* El área de un rectángulo es de 266 m² y el largo es 5 m más que el ancho. Calculen el perímetro del rectángulo.
   - *d)* El cateto $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo que se desea construir, mide cuatro tercios del cateto $\overline{AC}$, en tanto que su hipotenusa mide 2 cm más que el cateto $\overline{AC}$. Calculen los lados de este triángulo y constrúyanlo.
3. Determinen el valor de *p* para que las dos raíces de la ecuación $x^2 - px + 25 = 0$ sean iguales. Argumenten la estrategia que utilizaron y coméntenla con su profesor.
4. Con una cartulina rectangular se puede construir una caja de 175 cm³ cortando un cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Si la cartulina es 4 cm más larga que ancha, ¿cuáles son sus medidas?
5. Hallen el valor de los coeficientes *b* y *c* en la ecuación de segundo grado $5x^2 + bx + c = 0$ para que tenga como única solución a $x = -\frac{1}{2}$. Argumenten la estrategia que utilizaron y coméntenla con sus compañeros.
6. ¿Cómo se debe doblar un alambre de 20 cm para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a una distancia de 15 cm?
7. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 49 m/s. Determinen:
   - *a)* El tiempo que tarda en llegar al punto más alto.
   - *b)* La altura máxima que alcanza.

   Recuerden que la fórmula de un tiro vertical es $h = v_0 t - 5t^2$, donde v_o representa la velocidad inicial y *h* la altura que alcanza en cada instante.
8. La expresión algebraica $h = h_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} gt^2$ describe la trayectoria de una flecha en la cual hemos utilizado la letra *h* para denotar la altura que alcanza la flecha en su camino, v_{0y} es la componente vertical de la velocidad inicial que se le imprime a la flecha, *t* denota el tiempo que transcurre y *g* es la constante de la aceleración gravitacional que puede considerarse como g = 10 m/s² aproximadamente.
   - *a)* Escriban la expresión algebraica, considerando que se lanza con $v_{0y} = 10$ m/s desde una altura inicial de 1.25 m.
   - *b)* Determinen la altura que alcanza la flecha luego de 2 s de que inicia su vuelo.
   - *c)* ¿Qué tiempo tardará la flecha en caer y clavarse en la tierra?
   - *d)* ¿Qué tiempo tardará la flecha en alcanzar cinco metros de altura?
   - *e)* Determinen la mayor altura a la que llega la flecha. ¿En qué tiempo lo logra?

TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver las actividades 22 a 25 del Bloque III, páginas 52 a 57 de la *GIS* (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual puedes consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf consultada en octubre de 2013). Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Argumenten ampliamente las respuestas en el cuaderno y discútanlas con sus compañeros y el profesor.

En esta lección han trabajado con ecuaciones cuadráticas y analizaron cómo resolverlas utilizando la fórmula general. Es importante que reflexionen sobre cómo y cuándo utilizarla; es decir, se deben distinguir y asociar los coeficientes de la ecuación con los de la expresión general de una ecuación cuadrática (a, b, c); asimismo, hay que analizar el radicando $b^2 - 4ac$, tal como lo mencionamos en "los métodos" y por último, se tienen que determinar las soluciones reemplazando las letras por los números correspondientes.

Recuerden que las soluciones de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$ son, utilizando la fórmula general, las siguientes:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si la ecuación cuadrática tiene dos soluciones iguales ($x_1 = x_2$) ¿a qué se reduce la expresión de las soluciones?, ¿por qué? Argumenten en su cuaderno las respuestas y analícenlas con sus compañeros y profesor.

LECCIÓN 3.2

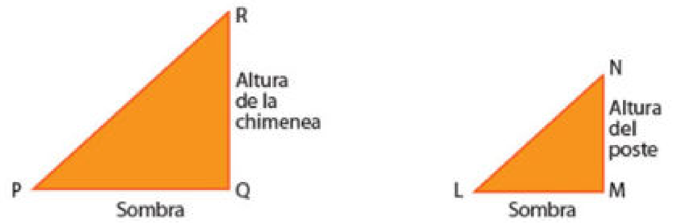
En esta lección aplicarás los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección con base en lo que han aprendido sobre semejanza y congruencia de figuras geométricas. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. Calculando la altura de manera indirecta

El profesor del Club de Matemáticas pidió a sus estudiantes que determinaran de manera indirecta la altura de la chimenea de una fábrica que está cerca de la escuela. Como dato, les dijo que la chimenea tiene su base en el suelo y que a las 11:30 a.m. proyecta una sombra de 35 m en el mismo instante en que un poste de 4 m de longitud, enterrado perpendicularmente en la tierra, proyecta una sombra de 2.4 m. Para resolver el problema, los estudiantes dibujaron la altura de la chimenea y la del poste con sus respectivas sombras. A partir de ello, observaron que cada objeto con su sombra formaba un triángulo, al que llamaron ΔPQR y ΔLMN, como se muestra enseguida.



Con base en los datos proporcionados por el profesor y el dibujo realizado por los estudiantes, analicen y argumenten en equipo lo siguiente:

- ¿Qué tipo de triángulos son ΔPQR y ΔLMN?

  ____

- ¿Qué relación reconocen entre el lado $\overline{PQ}$ que se forma con la sombra que proyecta el Sol al pasar por la chimenea, con el lado $\overline{LM}$ que se forma con la sombra que proyecta el poste?

  ____

- ¿Qué relación reconocen entre la altura $\overline{QR}$ de la chimenea, con la altura $\overline{MN}$ del poste?

  ____

- ¿Cómo son entre sí los triángulos que se forman con cada objeto a partir de su sombra?

  ____

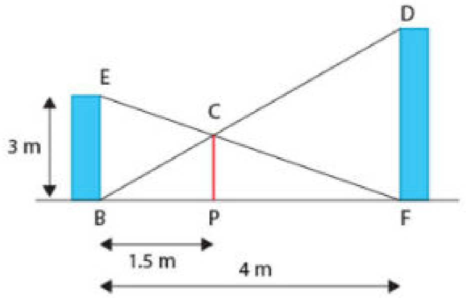
Tomando en cuenta lo anterior, analicen la manera de utilizar estos datos para saber cuál es la altura de la chimenea. Escriban en sus cuadernos los procedimientos.

Compartan sus resultados con los demás equipos y al final, analícenlos con su profesor. ¿Obtuvieron los mismos resultados? __________ ¿Desarrollaron los mismos procedimientos?

____

Actividad 2. Cálculo de magnitudes de manera directa

Don Manuel colocó un portón de dos hojas en su huerto. El portón, elaborado con hierro forjado, está sujeto a dos postes enterrados perpendicularmente en la tierra y ubicados a 4 m de distancia uno del otro. Se sabe que uno de los postes mide 3 m de alto y que el portón se abre por el lado $\overline{PC}$, paralelo a $\overline{BE}$ y a $\overline{FD}$; además $\overline{PF} = 2.5$ m, como se muestra en la figura adjunta. El herrero le colocó una barra reforzadora a cada hoja del portón ($\overline{BC}$ y $\overline{FC}$), que al cerrar se unen en el punto C. Don Manuel quiere saber qué área ocupa cada una de las cuatro láminas triangulares que forman el portón (ΔBEC, ΔBPC, ΔPCF y ΔFCD), porque las pintará de colores diferentes. Quiere tener datos exactos de las medidas de $\overline{PC}$ y $\overline{FD}$ para resolver este problema. Sin embargo, sus conocimientos de matemáticas son insuficientes para determinarlos, así como para calcular el área de cada lámina.



Con base en los datos del problema, en equipo, ayuden a don Manuel a resolver el problema del portón. Apóyense en los cuestionamientos siguientes:

- ¿Qué tipo de triángulos son ΔBFE, ΔPCF, ΔPCB y ΔFDB?
  ____
- ¿Cómo son entre sí los lados $\overline{BE}$, $\overline{PC}$ y $\overline{FD}$ de ΔBFE, ΔPCF, ΔPCB y ΔFDB?_________ ¿Por qué sucede esto?
  ____
- ¿Cómo son entre sí los lados $\overline{BP}$, $\overline{PF}$ y $\overline{BF}$ de los triángulos BFE, PCF, PCB y FDB? _________ ¿Por qué sucede esto?
  ____
- ¿Cómo se relacionan entre sí los lados $\overline{BE}$, $\overline{PC}$, $\overline{FD}$, $\overline{BP}$, $\overline{PF}$ y $\overline{BF}$ de ΔBFE, ΔPCF, ΔPCB y ΔFDB? ____________________ ¿Por qué sucede esto?
  ____

Tomando en cuenta lo anterior, analicen y justifiquen cómo utilizar estos datos para determinar…

- ¿Cuánto miden $\overline{PC}$ y $\overline{FD}$? ________________________
- ¿Qué área ocupa la lámina BEC? ________________________
- ¿Qué dimensión tiene la lámina BPC? ________________________
- ¿Qué área ocupa la lámina PCF? ________________________
- ¿Cuánto mide el área de la lámina FCD? ________________________
- ¿Cuál es el área total del portón? ________________________

Escriban sus procedimientos. Enseguida, compartan sus respuestas con sus demás compañeros y con su profesor. ¿Llegaron a las mismas conclusiones? __________ ¿Coinciden sus procedimientos? __________ ¿Por qué? __________________

Al final, elaboren un reporte en el que expliquen los procedimientos que usaron para resolver las actividades de esta lección. Consideren las siguientes preguntas:

- ¿Utilizaron los mismos procedimientos para determinar una magnitud de manera indirecta que los que emplearon para determinar una magnitud de forma directa? ________________________
- ¿Qué similitudes y semejanzas reconocen en los métodos usados?
  ____
- ¿Qué otros métodos podrían usarse para resolver este tipo de problemas?
  ____

Una síntesis…

Los triángulos semejantes y las sombras se utilizan comúnmente para medir de manera indirecta las alturas de objetos o estructuras que son demasiado altas, siempre que éstas sean perpendiculares al suelo. ¿Qué tipo de triángulos se forman por los rayos del Sol en los problemas que involucran sombras? ¿Por qué sucede esto?

____

____

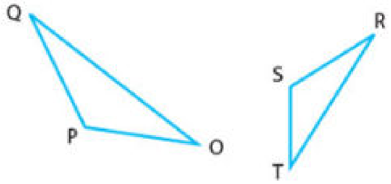
____

En otro tipo de situaciones se determinan partes de triángulos semejantes. Para calcular la altura de un objeto o estructura, en los problemas que involucran sombras se establecen relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos que se forman por los rayos del Sol.

En los problemas aquí planteados, la semejanza entre triángulos se estudió por la vía algebraica al establecer relaciones de proporcionalidad entre los lados de triángulos. A partir de ello, obtuvieron la misma cantidad en los dos triángulos al dividir la longitud de uno de los lados entre la longitud de otro. Otra forma que se analizó fue la gráfica, la cual consiste en superponer un triángulo en el otro; dicho procedimiento sirve para comprobar que un determinado triángulo cabe exactamente en una parte del otro.

En su cuaderno dibujen los dos triángulos siguientes. Enseguida, recórtenlos y superpónganlos. ¿Son triángulos semejantes ? __________ Justifiquen tu respuesta.

____

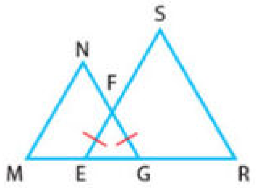


LOS MÉTODOS

Cuando se tienen triángulos semejantes, se puede determinar cualquier dimensión que falte, siempre que se conozca la relación que existe entre ellos. Con base en lo que aprendieron en esta lección, resuelvan en equipo los problemas planteados en los casos siguientes. Describan en cada caso el método empleado.

Caso 1: Para determinar si los triángulos son semejantes

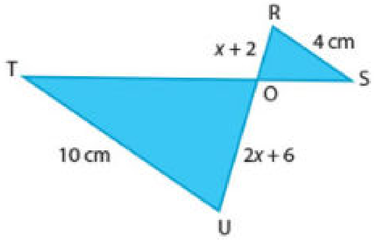
En la figura siguiente, $\overline{MN} \parallel \overline{EF}$, $\overline{RS} \parallel \overline{GF}$, $\overline{NG} = 15$ m, $\overline{SE} = 20$ m, $\overline{MG} = 9$ m y $\overline{RM} = 12$ m, y $\overline{EF}$ mide lo mismo que $\overline{GF}$, ¿cuáles de los triángulos son semejantes?



Método:

Caso 2: Para determinar una medida de forma directa (partes de triángulos semejantes)

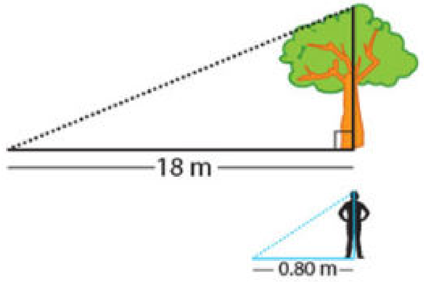
Si se sabe que $\overline{RS} \parallel \overline{UT}$, ¿cuál es el valor de los lados $\overline{UO}$ y $\overline{OR}$?



Método:

Caso 3: Para determinar una medida de forma indirecta

¿Cuánto mide la altura de un árbol, si se sabe que a una hora determinada proyecta una sombra de 18 m en el mismo instante en que una persona de 1.60 m de estatura proyecta una sombra de 0.80 m?



Método:

PARA HACER

1. El profesor del Club de Matemáticas de la escuela pidió a sus estudiantes que determinaran la altura de un árbol sin medirla directamente. Se sabe que a una hora determinada el árbol proyecta una sombra de 15 m, al mismo tiempo un poste de 2 m de longitud y enterrado perpendicularmente en la tierra proyecta una sombra de 2.6 m. Hagan en su cuaderno un dibujo que represente la altura del árbol, el poste y las respectivas sombras que proyectan.

   a) ¿Qué tipo de triángulos se forman con la altura de ambos objetos y sus respectivas sombras? ____________________ ¿Por qué sucede esto?

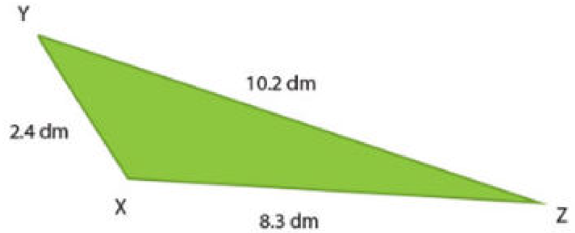
   b) ¿Qué relación reconocen entre el lado que se forma con la sombra que proyecta el Sol al pasar por el árbol a una determinada hora, con el lado que se forma con la sombra que proyecta el poste?

   c) ¿Qué relación reconocen entre la altura del árbol, con la altura del poste?

   d) ¿Cómo son entre sí los triángulos que se forman con cada objeto a partir de su sombra?

   Tomando en cuenta lo anterior, Analicen cómo utilizar estos datos para saber cuál es la altura del árbol. Escriban sus procedimientos.

2. Construyan un triángulo semejante al triángulo XYZ de manera que los lados de la nueva figura satisfagan una razón 2/5.



   a) ¿Cuánto miden los lados del nuevo triángulo?

   b) ¿Cuánto mide su perímetro?

3. La base de un triángulo isósceles de perímetro *p*, mide *m* y uno de sus lados iguales *n* guarda una razón $\frac{m}{n} = \frac{3}{7}$. A partir de estos datos, determinen lo que se pide.

   a) Con las medidas de los lados iguales de un triángulo isósceles con estas características, ¿cuántos triángulos isósceles con esas características se pueden trazar? Argumenten su respuesta. __________

   b) ¿Cuánto mide *p* en el triángulo que trazaron? __________

   utilicen su juego geométrico y construyan el triángulo isósceles que determinaron.

4. Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera, ¿qué condiciones debe cumplir para que se tengan triángulos congruentes al trazar las diagonales? ____________

5. Construyan un triángulo equilátero y tracen una recta paralela a uno de sus lados de manera que la razón de semejanza entre el triángulo que se forma con el trazo de esta recta y el triángulo original, sean igual a:

   a) $\frac{1}{4}$

   b) $\frac{2}{3}$

En esta lección aprendieron a resolver problemas en los que las longitudes que se requieren conocer no son accesibles para realizar una medición directa con el objeto. Para ello, se auxiliaron de los criterios de semejanza que han estudiado en lecciones anteriores. ¿Cuáles son estos criterios? Elaboren un informe en donde describan la manera en que se pueden utilizar estos criterios para resolver este tipo de problemas. Incluyan ejemplos que ilustren las estrategias que consideren pertinentes.

LECCIÓN 3.3

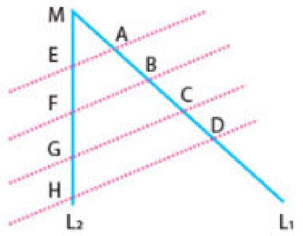
En esta lección aprenderás a resolver problemas geométricos mediante el Teorema de Tales.

PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección, con base en lo que han aprendido sobre la semejanza de figuras geométricas. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. En busca de relaciones importantes (Primera parte)

En la siguiente figura, los segmentos $\overline{MA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ que están sobre la recta L_1 tienen la misma medida. Además, los segmentos de recta $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$ y $\overline{HD}$ son paralelos entre sí.



a) ¿Cuál es la relación entre las longitudes de segmentos $\overline{ME}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ y $\overline{GH}$? ________
____

¿Por qué sucede esto? ____
____

b) Determinen los valores numéricos de las siguientes razones (midan con una regla cada segmento):

$\frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} =$	$\frac{\overline{EG}}{\overline{AC}} =$	$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} =$
$\frac{\overline{ME}}{\overline{MA}} =$	$\frac{\overline{FH}}{\overline{BD}} =$	$\frac{\overline{EH}}{\overline{FG}} =$

c) ¿Cómo se relacionan estas razones numéricas? ____________________
____

¿Por qué sucede esto? ____
____

d) Tomando en cuenta lo anterior, encuentren y escriban en su cuaderno todas las relaciones numéricas que haya en la figura. Justifiquen en cada caso sus elecciones.

e) Comparen sus respuestas con sus demás compañeros. ¿Obtuvieron los mismos resultados? ____

f) ¿Se seguirían cumpliendo las relaciones si las rectas L_1 y L_2 fuesen también paralelas? Expliquen por qué. ________________________________

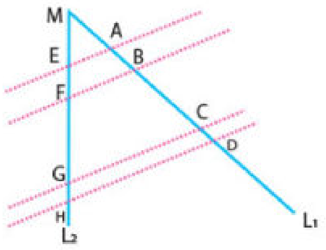
Tracen en su cuaderno una figura que represente esta situación y con base en ella expliquen sus conclusiones.

g) ¿Se seguirían cumpliendo las mismas relaciones si los segmentos $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$ y $\overline{HD}$ no fuesen paralelos? __________ Expliquen por qué.

____

Actividad 2. En busca de relaciones importantes (Segunda parte)

Consideren ahora la siguiente figura. En ella, los segmentos $\overline{MA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ que están sobre la recta L_1 no tienen la misma medida, pero los segmentos de recta $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$ y $\overline{HD}$ son paralelos entre sí.



a) ¿Cómo son entre sí los triángulos ΔAME, ΔBMF, ΔCMG y ΔDMH? Justifiquen sus respuestas. ____

____

¿Sucede lo mismo en los triángulos Δ AME, ΔBMF, ΔCMG y ΔDMH de la figura de la Actividad 1? __________ ¿Por qué? ________

____

b) Calculen los valores numéricos de las siguientes razones (midan con una regla cada segmento de recta):

$\frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} =$	$\frac{\overline{EG}}{\overline{AC}} =$	$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} =$
$\frac{\overline{ME}}{\overline{MA}} =$	$\frac{\overline{FH}}{\overline{BD}} =$	$\frac{\overline{EH}}{\overline{FG}} =$

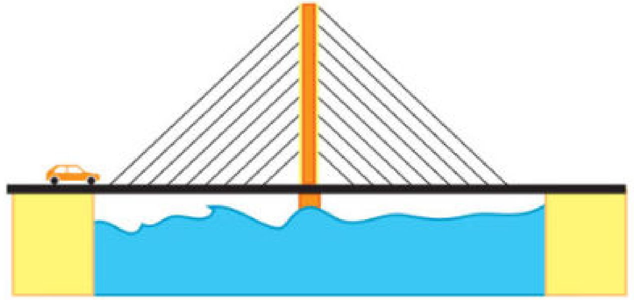
c) Escriban en su cuaderno todas las relaciones que se pueden encontrar en esta figura. No olviden proporcionar argumentos que justifiquen sus resultados.

d) Comparen sus resultados con los obtenidos en el inciso *b*) de la Actividad 1. ¿Por qué sucede esto? __________ Compartan sus resultados con los demás equipos y con su profesor, ¿Obtuvieron los mismos resultados? ______________

Actividad 3. La torre del puente

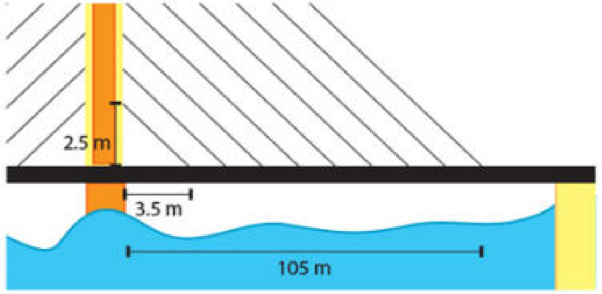
Como parte de un proyecto para su clase de Matemáticas, un grupo de estudiantes de tercer grado se ha propuesto calcular la medida de la torre principal del puente que permite cruzar el río de su comunidad. La única información que tienen es que las cuerdas que sostienen la base del puente son paralelas y se encuentran a la misma distancia una de otra.

Enrique, un integrante del grupo, logró resolver el problema únicamente midiendo la distancia vertical que va desde la base de la torre hasta la primera cuerda que la sostiene, y la distancia horizontal que hay desde la base de la torre hasta la última cuerda (*véase* la figura).



¿Cómo obtuvo Enrique la medida total de la torre utilizando únicamente tal información? Consideren las siguientes preguntas para deducir el procedimiento.

a) ¿Qué figuras geométricas forman la torre, la base horizontal y las cuerdas del puente? __________ ¿Cómo se relacionan estas figuras? ________________



b) Considerando los cálculos que Enrique ya hizo, ¿cuál es la medida que hace falta conocer para obtener la medida total de la torre? ________________

____

c) Tomando en cuenta lo visto en las actividades 1 y 2, ¿cuáles son las *razones numéricas* que pueden considerarse a partir de los lados de dichas figuras y que además se relacionan con las medidas que conoce Enrique?

____

d) Con base en la información que han obtenido, propongan un procedimiento para encontrar la medida total de la torre principal del puente. ¿Cuánto mide la torre?

____

____

____

Compartan sus respuestas con sus demás compañeros ¿Llegaron a las mismas conclusiones? __________ ¿Coinciden sus procedimientos? __________ ¿Por qué? __________

Una síntesis…

En las actividades anteriores se percataron de las relaciones de proporcionalidad que se derivan al considerar dos rectas que son cortadas por dos o más rectas paralelas, sin importar que éstas sean equidistantes. Estas relaciones y sus condiciones de aparición se conocen como Teorema de Tales. El teorema dice que:

Si dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más rectas paralelas, se cumple que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra. Este teorema se le atribuye al matemático griego Tales de Mileto, que vivió en el siglo VI a. n. e., aproximadamente.

Proporcionen argumentos para justificar por qué dejan de cumplirse las hipótesis de este teorema cuando las rectas que deben ser paralelas no lo son.

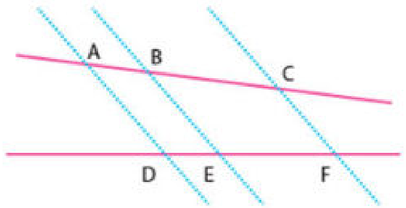
TIC

¿Sabían que Tales de Mileto fue el primero en justificar de, manera deductiva, la veracidad de proposiciones matemáticas hace más de 2600 años? Para conocer más sobre este sabio matemático de la Grecia antigua y sus aportaciones a la matemática, pueden consultar la página: http://www.televisioneducativa.gob.mx/index.php/videos-telesecundaria (consultada en octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

LOS MÉTODOS

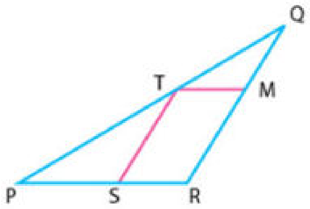
Con base en lo que han aprendido en esta lección, encuentren las medidas faltantes de las siguientes figuras. En cada caso, describan la relación de proporcionalidad requerida y el proceso que siguieron para llegar al resultado.

Si $AD \parallel BE \parallel CF$ y DE = 2.8 cm, EF = 4 cm, AB = 3.2 cm, ¿cuál es la medida del segmento BC?



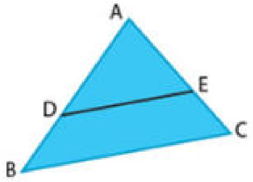
Método:

En el ΔPQR, $\overline{PR} \parallel \overline{TM}$ y $\overline{MR} \parallel \overline{TS}$. Si $\overline{TQ} = 7.1$ dm, $\overline{TM} = 3.6$ dm y $\overline{PQ} = 17.5$ dm, ¿cuánto miden $\overline{PS}$, $\overline{TS}$ en el ΔPST y $\overline{QM}$ en el ΔPQR?



Método:

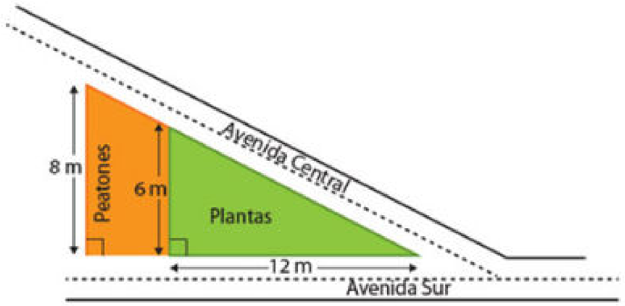
En el ΔABC, $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ y $\overline{AD} = 4.5$ cm, $\overline{DB} = 3.1$ cm, $\overline{EC} = 2.7$ cm, ¿cuál es la medida del segmento $\overline{AE}$?



Método:

PARA HACER

1. Un urbanista diseñará una sección para plantas y otra para un paso peatonal. Ambas secciones se construirán una junto a la otra, sobre un camellón de forma triangular que se forma con la intersección de las avenidas Central y Sur, como se muestra en el siguiente dibujo.



El diseño indica que la sección para plantas se ubica en el vértice que se forma con la intersección de ambas avenidas y la sección peatonal está en un área contigua. Con base en el diseño y las medidas que aparecen en él, analicen y expliquen lo siguiente.

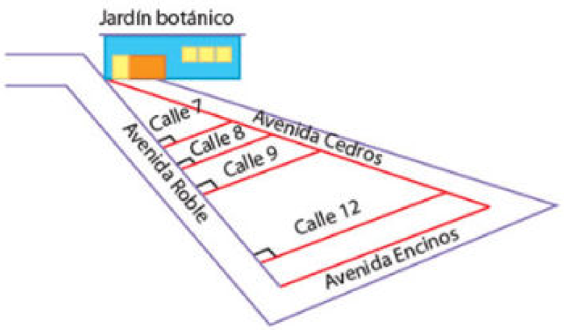
a) ¿Cuántos metros mide el lado de la sección destinada para las plantas que colinda con la avenida Central? __________

b) ¿Cuántos metros mide el lado de la sección peatonal que colinda con la avenida Central? __________ ¿Cuántos mide el que limita con la avenida Sur? __________

c) ¿Qué perímetro destinará el gobierno de la ciudad para la construcción de las dos secciones? __________

d) ¿Cuál de las dos secciones ocupará mayor área? __________

2. Ramón realizará una investigación con sus compañeros de tercer año en el jardín botánico de su colonia, el cual se localiza en la intersección de las avenidas Cedros y Roble, como se muestra en el croquis siguiente.



La parada del camión que usa Ramón para llegar al jardín botánico se encuentra en la Calle 12, perpendicular a la avenida Roble; mientras que María, utiliza la que está en la esquina de la Calle 9, también perpendicular con esa misma avenida.

Los dos compañeros saben que del jardín botánico a la parada de la Calle 12 hay 180 m y que la longitud de esa calle es de 120 m; además, la longitud de la Calle 9 equivale a 66 m. Con base en los datos anteriores, Analicen y expliquen lo siguiente:

a) ¿Qué distancia hay, en metros, del jardín botánico a la parada del camión de la Calle 9? ____________________

b) Si la longitud de la Calle 7 es de 40 m, ¿qué distancia hay, en metros, del jardín botánico a la parada del camión que se encuentra en esa calle? ____________

Ramón y María también saben que del jardín botánico hasta la intersección con la Calle 8, subiendo por la avenida Cedros, hay una distancia de 96.2 m, ¿cuánto mide la longitud de la Calle 8? ____________________

Comparen los procedimientos que llevaron a cabo para resolver el problema, con los de sus compañeros. ¿Efectuaron los mismos procedimientos? __________ ¿Por qué? ____________________

3. Con la ayuda de una regla no graduada y un compás propongan un procedimiento para dividir el siguiente segmento en 4 segmentos iguales. (Sugerencia: analicen nuevamente la Actividad 1 de esta lección y las relaciones entre los segmentos que ahí se estudiaron.)

Completen la siguiente tabla con base en las figuras que se muestran a continuación. $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$.

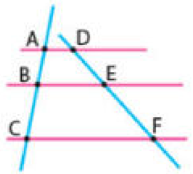


Figura 1

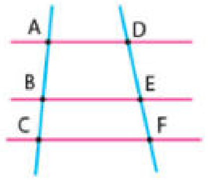


Figura 2

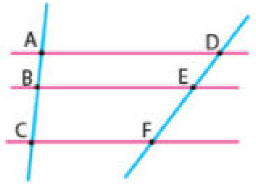
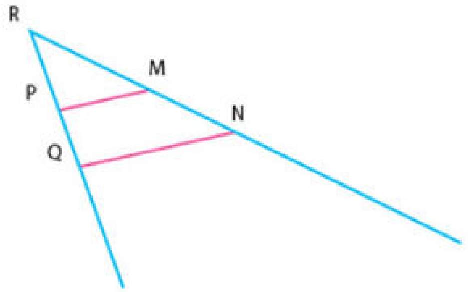


Figura 3

	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\overline{DF}$
Figura 1	8			10		25
Figura 2		9		12		30
Figura 3	9	15			18	

4. En la figura siguiente, $\overline{PM} \parallel \overline{QN}$ cortan a las semirrectas RQ y RN. Con base en ello, analicen y expliquen lo siguiente.



a) ¿Qué segmentos determina la semirrecta RQ? __________ ¿Cuáles determina la semirrecta RN? ____________________

b) ¿Qué relaciones de proporción se obtienen de los segmentos que determina la semirrecta RQ? __________ ¿Cuáles son los que determina la semirrecta RN?

____

c) ¿Son semejantes los triángulos ΔPRM y ΔQRM __________ Proporcionen argumentos que justifiquen su respuesta.

____

A lo largo de esta lección aprendieron a identificar las relaciones de proporcionalidad que el Teorema de Tales establece, así como a resolver problemas que lo involucran. Propongan una frase que describa este teorema: ¿Cuándo no se cumplen las relaciones que establece el teorema?

En equipo, escriban un ensayo en su cuaderno explicando la importancia de este teorema en la resolución de problemas geométricos. Describan situaciones de la vida real en las que se aplique el Teorema de Tales.

LECCIÓN 3.4

En esta lección harás uso del concepto de semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

GLOSARIO

Dos figuras son congruentes si hay una transformación rígida que cambia a una figura en otra sin alterar ninguna de sus medidas; serán semejantes si hay una transformación que le hace cambiar su tamaño, pero no altera su forma.

A la transformación que altera el tamaño, pero preserva la forma de la figura se le conoce como ***homotecia***.

Una figura que ha sufrido una transformación de homotecia produce en ella un cambio de medidas, el cual también se conoce como *cambio de escala*.

Las homotecias, en cuanto transformaciones, son simples cambios de escalas.

PARA APRENDER

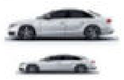
Actividad 1

Los siguientes cinco pares de fotografías constituyen ampliaciones y reducciones de una fotografía original (en este caso la que está en la parte superior de cada par):

a)

d)

c)



b)

e)

Con su regla midan el largo y alto de cada auto. Respondan en su cuaderno lo que se indica más abajo.

a) Para cada par de fotografías indiquen cuánto creció o disminuyó el ancho y lo alto de la fotografía.

b) Establezcan la razón entre largo y alto de cada par de fotografías.

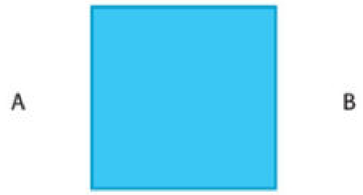
c) A partir de la definición de homotecia dada en el glosario, indiquen cuáles pares de ampliaciones o reducciones de fotografías constituyen transformaciones de homotecia.

Actividad 2

GLOSARIO

Si dos figuras geométricas se relacionan bajo una transformación de **homotecia**, se dice que las transformaciones son homotéticas.

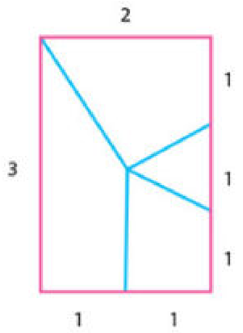
a) Si se tiene el cuadrado A y se incrementa cada uno de sus lados en una unidad para obtener la figura B (dibújala), ¿las figuras son homotéticas? ________________



b) Si se tiene el rectángulo A y se aumenta cada uno de sus lados en una unidad para obtener la figura B (dibújenla), ¿las figuras son homotéticas? ________________

c) Si en la figura anterior se incrementó lo largo en una unidad, ¿cuánto deben incrementar el ancho para que el nuevo rectángulo sea homotético al primero? ____

d) Si en la siguiente figura se incrementa el segmento que mide 2 unidades de manera que mida 2.5 unidades, ¿cuánto deberán incrementarse los restantes segmentos para que la figura resultante sea homotética? Si se les dificulta responder a esta pregunta, trabájenla con algunos de sus compañeros y despues consulten a su profesor. ________________



Actividad 3

Con sus compañeros analicen la siguiente figura y contesten las preguntas que se formulan justificándolas.

En la Figura 1 tenemos los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ con sus lados paralelos respectivamente.

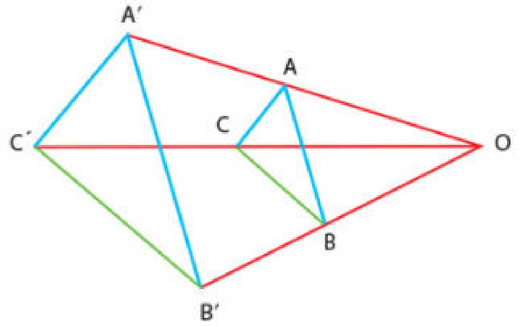


Figura 1

GLOSARIO

Al punto *O* se le denomina **centro de homotecia**.

A la homotecia de la figura 1 se le llama homotecia directa, porque el centro O está en el exterior de los segmentos que unen los puntos homólogos. La razón es positiva.

a) ¿El triángulo $\Delta A'B'C'$ es homotético con el triángulo ΔABC? ________________

b) ¿La igualdad $AB/A'B' = AC/A'C' = k$, se cumple, siendo k un número positivo?

En la Figura 2 tenemos que en los triángulos ΔABC y ΔA″B″C″ con sus lados paralelos respectivamente.

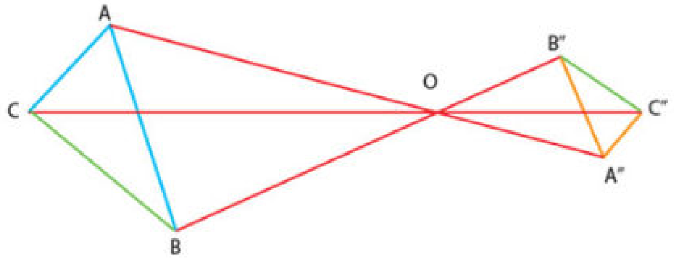


Figura 2

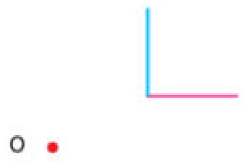
c) ¿El triángulo ΔA″B″C″ es homotético con el triángulo ΔABC? ________________

d) ¿La igualdad $\overline{AB}/\overline{B''A''} = \overline{AC}/\overline{C''A''} = -k$, se cumple, siendo k un número positivo?

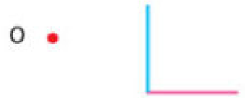
____

Una síntesis…

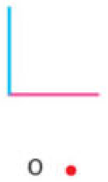
a) Efectúen la homotecia directa de la figura, de manera que la razón sea dos.



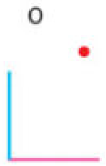
b) Lleven a cabo la homotecia directa de la figura, de forma que la razón sea 1/3.



c) Efectúen la homotecia inversa de la figura, de modo que la razón sea −1.



d) Hagan la homotecia de la figura, de tal forma que la razón sea −2.



Actividad 4

En equipo discutan y respondan a cada uno de los siguientes planteamientos, escriban las conclusiones en su cuaderno.

a) Investiguen lo que pasa con la homotecia de un ángulo, ¿se deforma? Argumenten su respuesta.

____

b) ¿Qué pasa con la homotecia de una circunferencia? Analicen los casos en que el centro de la homotecia coincida con el centro de la circunferencia.

____

c) ¿Qué pasa si el centro de la homotecia está fuera de la circunferencia?

____

d) ¿Qué pasa con una homotecia si la razón de homotecias es 1?

____

e) ¿Qué pasa con una homotecia si la razón de homotecias es −1?

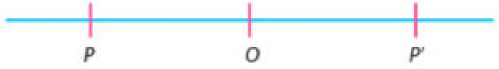
____

LOS MÉTODOS

Si $k > 0$, entonces cuando aplicamos una transformación de homotecia con centro en O y razón k a un punto cualquiera P, obtenemos otro punto P' en la recta que definen O y P, de manera que se tiene la relación $\overline{OP'} = k\,\overline{OP}$.

$OP'/OP = K > 0$

Si $k < 0$, entonces cuando aplicamos una homotecia con centro en O y razón k, el centro de la homotecia queda situado entre el punto y su imagen.



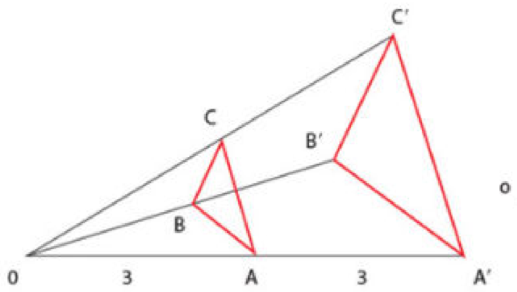
$OP'/OP = K < 0$

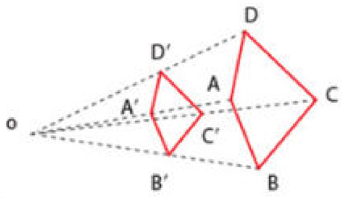
GLOSARIO

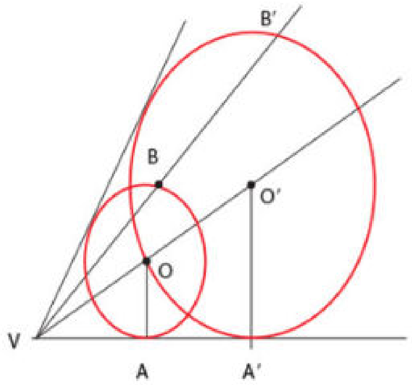
A los puntos P y P' se les llama puntos **homólogos**, o bien, a P' se le llama imagen de P bajo la homotecia.

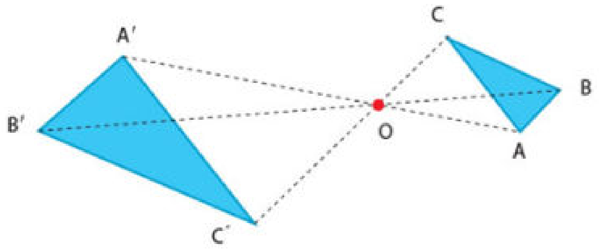
Respondan en su cuaderno.

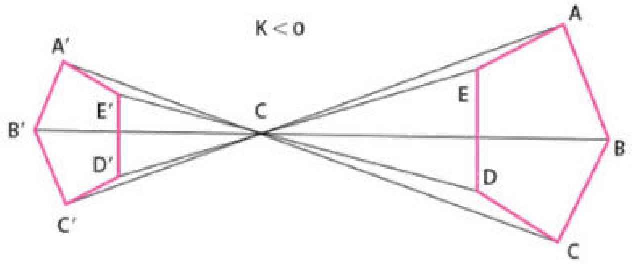
1. ¿Para qué caso de homotecia…
   - *a*) … la figura queda entre el centro de homotecia y su imagen?
   - *b*) … el centro de homotecia queda entre la figura y su imagen?
2. Para cada una de las siguientes homotecias de figuras, indica, el tipo de homotecia y señala sobre la figura el centro de homotecia y sus respectivos puntos homólogos.

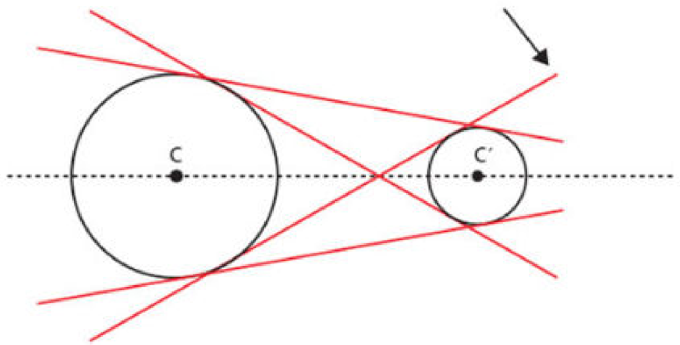








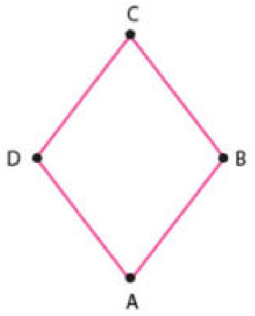




PARA HACER

En su cuaderno, escriban las respuestas a las siguientes situaciones que se plantean.

1. Tracen un segmento $\overline{AB}$ de 2 cm. Señalen un punto *O* que no esté sobre $\overline{AB}$. Construyan la imagen de $\overline{AB}$ bajo una homotecia con centro en *O* y razón 3. ¿Cuántas posibilidades hay?
2. Empleando el mismo segmento del ejercicio anterior, pero ahora con el punto *O* sobre el segmento $\overline{AB}$. Construyan la imagen de *AB* bajo una homotecia con centro en *O* y razón 3.
3. Encuentren la imagen de un rombo ABCD bajo una homotecia con centro en A y razón 1.5.



4. El triángulo ΔA′B′C′ es imagen homotética del triángulo ΔABC, siendo *O* el centro y *k* la razón. Para cada caso de *k* ($k = 1, k \neq 1$), digan si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifiquen sus respuestas.

   a) $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ______________________________

   b) $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ______________________________

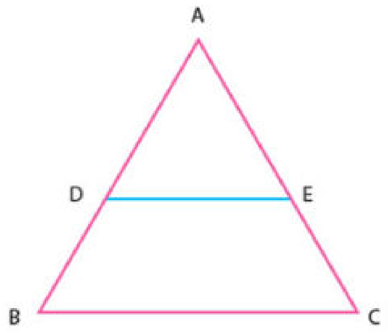
   c) El ángulo ABC = ángulo A′B′C′ ______________________________

   d) $\overline{B'C'} = k\,\overline{BC}$ ______________________________

   e) El ΔABC ≈ ΔA′B′C′ ______________________________

   f) O, A y A′ están alineados ______________________________

5. Encuentren la imagen del segmento $\overline{AB}$ de longitud 3 cm bajo la siguiente homotecia.
   a) Con centro en *O* fuera del segmento y razón -3.
   b) Con centro en *O* fuera del segmento y razón $-1/3$.
6. En la figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Determinen:
   a) La homotecia mediante la cual el triángulo ΔADE se transforma en el triángulo ΔABC.
   b) La homotecia mediante la cual el triángulo ΔABC se transforma en el triángulo ΔADE.



En esta lección conocieron una nueva transformación que está asociada con el concepto de semejanza. Esta transformación se caracteriza por el hecho de que al llevarla a cabo no modifica la forma de las figuras, solamente modifica sus medidas. De alguna manera podemos decir que la transformación de homotecia constituye una herramienta para hacer ampliaciones y reducciones a escala de las figuras.

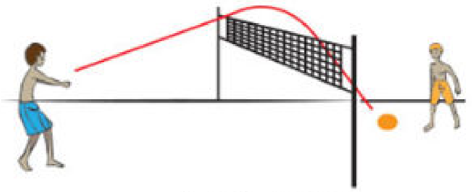
LECCIÓN 3.5

En esta lección aprenderás a leer y construir gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

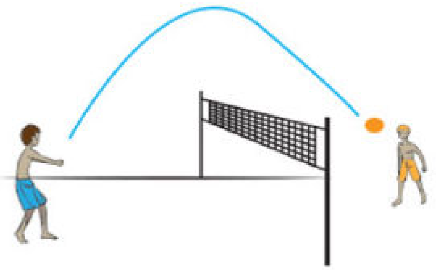
PARA APRENDER

Actividad 1. El juego y el tiro parabólico

Con mucha frecuencia jugamos fútbol, voleibol o algunos otros juegos en los que se lanza una pelota. Un día, en el partido de voleibol, Daniel hizo un *servicio* que siguió una trayectoria curva (*véase* la figura a). En un segundo *servicio*, más alto que el primero (*véase* la figura b), sí pudieron contestarle.

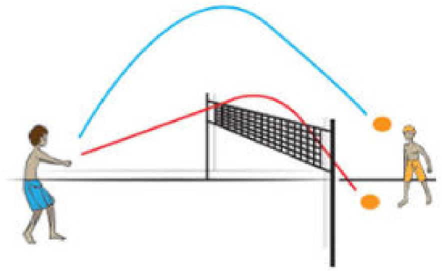


a) Primer saque



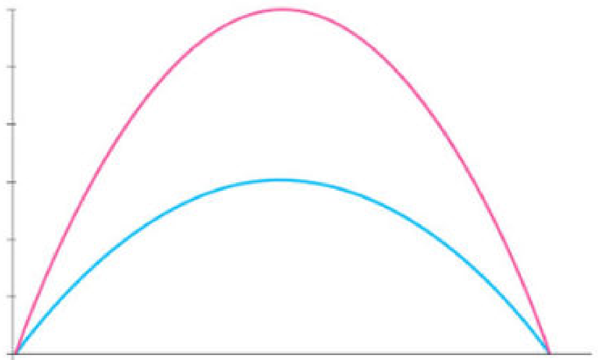
b) Segundo saque

Si colocamos ambos *servicios* en la misma imagen, podemos responder lo siguiente: ¿qué diferencias hay entre los dos? Observen la figura donde se ilustran al mismo tiempo los dos servicios. ¿Cómo son sus alturas? ____________ Comenten con sus compañeros las respuestas. ____



c) Primer y segundo saque juntos

Al observar los servicios, un estudiante le preguntó a su profesora: "¿por qué las dos curvas se ven tan parecidas? ¡Tienen la misma forma!"



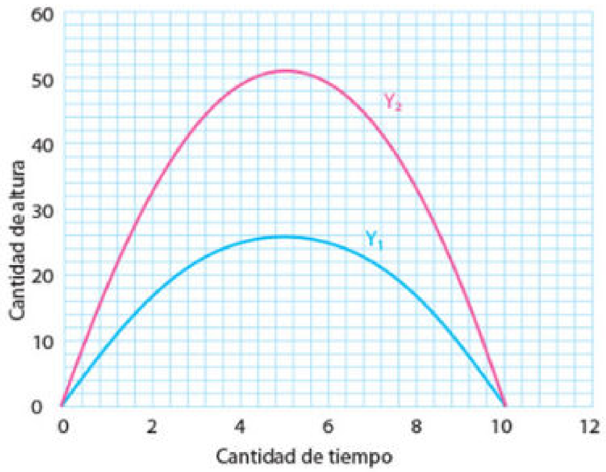
Ejemplo de formas de las parábolas

GLOSARIO

Parábola: Es la curva que representa la gráfica de una función cuadrática. Esta curva es característica de fenómenos relacionados con la gravedad, como la trayectoria de una flecha o un dardo y el lanzamiento de un balón.

La maestra le dijo que las gráficas se ven muy parecidas porque ambas son *parábolas*. Estas figuras aparecen en una gran cantidad de fenómenos de la naturaleza y de la sociedad. En grupos de tres compañeros, describan las características que pueden observar de las parábolas. Comenten entre todos y anoten en sus cuadernos todas las características que encontraron.

En un papel milimétrico coloquen ambas gráficas, como se muestra abajo, localicen algunos puntos de ellas y "determinen aproximadamente" sus coordenadas. Completen los datos que faltan en la tabla de abajo y compárenlos con los resultados de otros grupos.



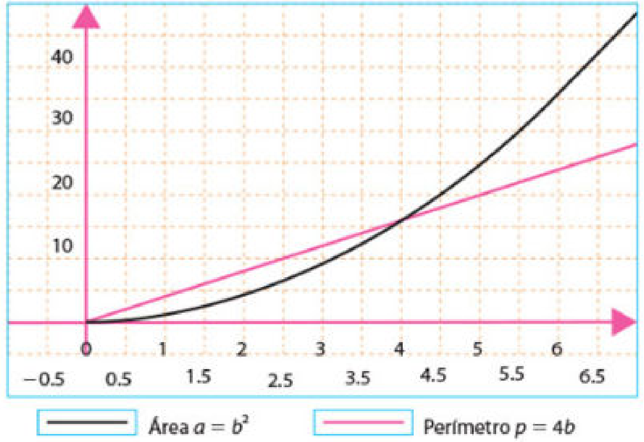
x	y_1	y_2
0	1	1
1		
3.5	23.75	46.5
4		
4.5	25.75	50.5
5		
5.5		
6		
7	22	43
9		
10		

TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver la actividad 26 del Bloque III, páginas 58-60 de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (consultada en noviembre de 2013) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Actividad 2. Entre áreas y perímetros

La relación entre la longitud del lado de un polígono y el perímetro, así como la que hay entre la longitud del lado y su área son relaciones de dependencia que constituyen funciones y cuyas fórmulas algebraicas pueden graficarse en el plano cartesiano. Conforme se hace variar el lado b de un cuadrado de 0 a 6.5 cm también cambia la medida de su perímetro y área correspondiente. Los resultados obtenidos se representan en la gráfica:



De acuerdo con la información de la gráfica, respondan lo siguiente.

a) ¿Qué valor es mayor: el del área o el del perímetro?

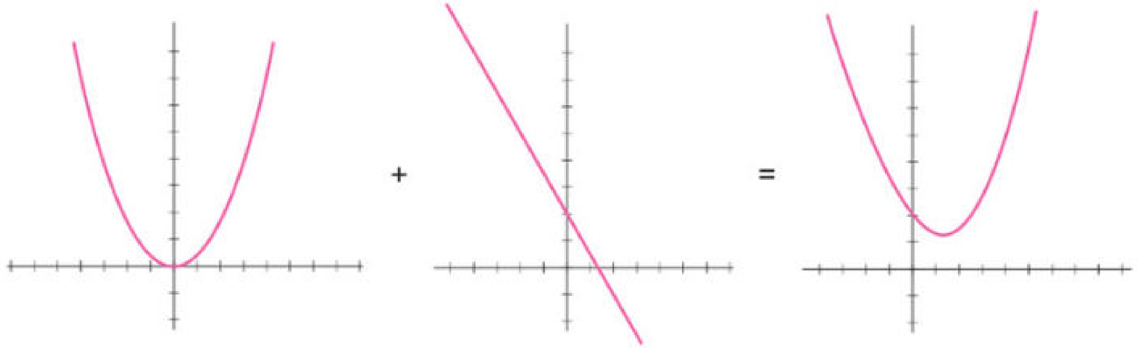
____

b) Si tuvieran un terreno cuadrangular y quisieran que el área fuera igual que el perímetro del terreno, ¿cuánto tendría que medir el lado del terreno? __________ ¿cómo influyen las unidades de medida respectivas? ______________________

c) En un rectángulo cuya base es siempre el doble de su altura, ¿cuáles serían las funciones que representarían el área y el perímetro, con relación a la longitud de la base? Grafíquenlas en el mismo plano cartesiano. ¿Cumplen las mismas funciones que en las respuestas *a*) y *b*)? __________, ¿a qué se debe esto? ______________ Comparen su respuesta con la de tus compañeros.

Actividad 3. Modelando funciones[1]

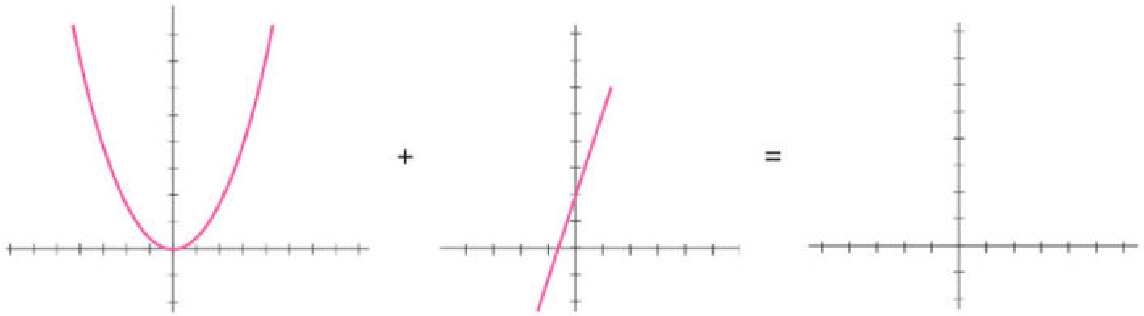
A partir de la siguiente operación con funciones, resuelvan lo que se pide. Observación: los símbolos suma e igual se usan en un sentido metafórico, pues se suman funciones, no gráficas.



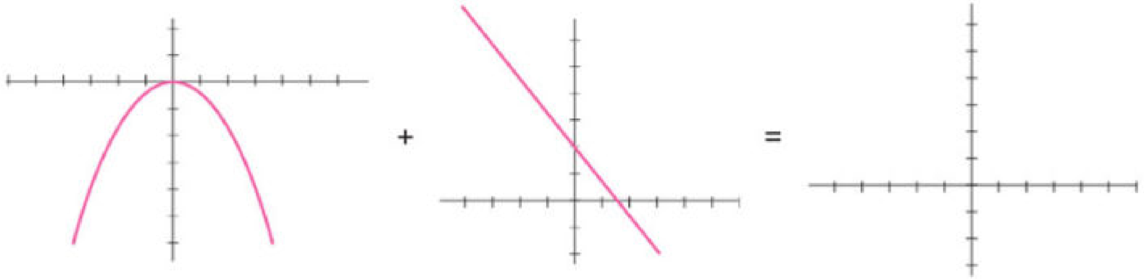
1. ¿Por qué la gráfica resultante es de esa forma?, ¿qué efecto provocó la suma correspondiente? ______________________________

En equipos de tres compañeros, resuelvan las siguientes gráficas de funciones:

I.



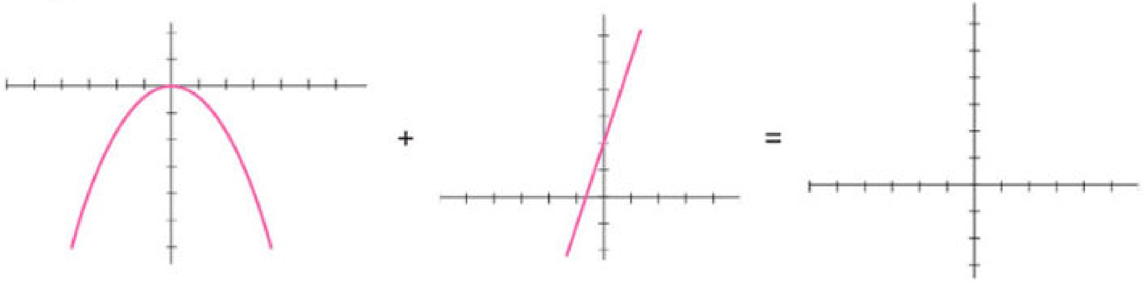
II.



---

[1] Actividad basada en la tesis: Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

III.



2. A partir de lo que obtuvieron, respondan lo siguiente:

a) ¿Qué función obtenemos al sumar una función cuadrática con una función lineal?, ____________ ¿Siempre ocurre esto? ____________ ¿Por qué?

____

b) Cuando la parábola es positiva, ¿qué pasa si se suma una recta con pendiente positiva? ______________________________

____

¿Y si se le suma una recta con pendiente negativa? ____________

____

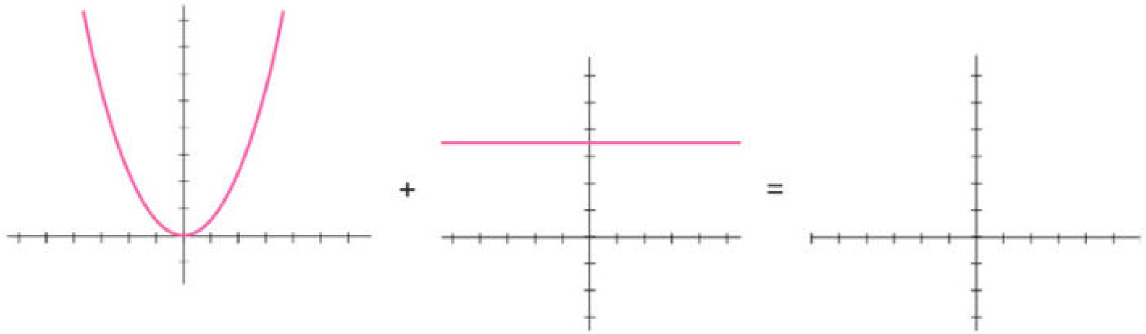
c) Cuando la parábola es negativa, ¿qué pasa si se suma una recta con pendiente positiva? ______________________________

____

¿Y cuando ésta es negativa? ______________________________

d) Con ayuda de su profesor respondan, ¿qué función resulta en el siguiente caso?, ¿qué efecto tuvo la recta? Justifiquen su respuesta. ____________

____



En su cuaderno realicen una tabla que resuma los efectos que observaron en la actividad anterior. Consideren todas las variables posibles; por ejemplo, si la parábola es positiva o negativa, el valor de la pendiente de la recta, etcétera. Respondan lo siguiente: ¿qué recta podría sumarse a la parábola si se quiere obtener como resultado una parábola muy abajo del origen (0,0)? ____________

Una síntesis...

Una función cuadrática expresa comportamientos que presentan cierta simetría, por ejemplo, una pelota que sube y baja; ¿podrían mencionar algunas de las características de esta función? ______________________________

____

La representación gráfica de la función cuadrática se llama parábola, ¿cuál es la forma que tiene la parábola?, descríbanla. ______________, ¿pueden reconocer esta forma en algún fenómeno de su vida cotidiana?, mencionen al menos dos. ______________________________.

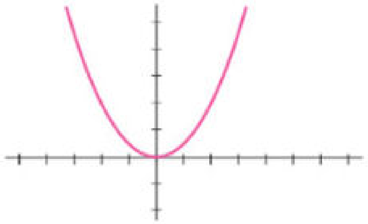
LOS MÉTODOS

En las actividades se mostró que la gráfica de las funciones cuadráticas responden a un lugar geométrico llamado *parábola*; además, tales funciones pueden servir como modelo matemático para situaciones como el lanzamiento de una pelota y la relación entre el lado de un cuadrado y su área, incluso que la misma función cuadrática se puede modelar a partir de una parábola y una recta. En general, ¿qué otras características observaron de la parábola? ______________________________

____

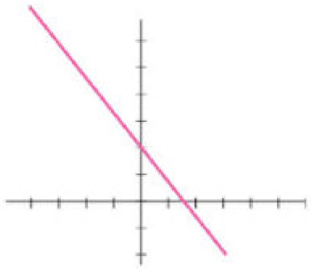
Así, podemos decir que la función $y = x^2$ es una función cuadrática, en la que el exponente de la variable x es 2, que la función no se comporta de manera constante y que su gráfica es una parábola.

A partir de la función $y = x^2$ y la función lineal $y = bx + c$, podemos formar todo un universo de parábolas o funciones cuadráticas, tan sólo con variar los parámetros correspondientes.



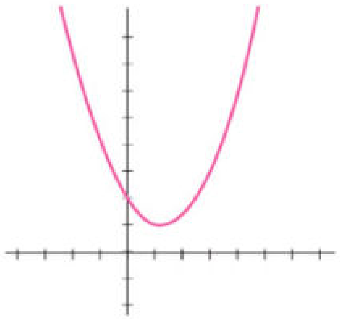
$y = x^2$

+



$y = bx + c$

=



$y = x^2 + bx + c$

Para graficar la función $y = x^2 + 4x - 1$, ¿cuál es la suma de funciones que realizarías?

____

¿Y para la función $y = -2x^2 + 4x - 1$?

____

Podemos decir que la forma general de la función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

PARA HACER

1. En su cuaderno grafiquen en el mismo plano las siguientes funciones.

$$y = x; \qquad y = x + x; \qquad y = x^2$$

A partir de la información que brindan las gráficas, respondan:

a) Al considerar $y = x$ y $y = x + x$, ¿qué función crece más rápido?

____

b) Al considerar $y = x$ y $y = x^2$, ¿qué función crece más rápido?

____

c) Al considerar $y = x + x$ y $y = x^2$, ¿qué función crece más rápido?

____

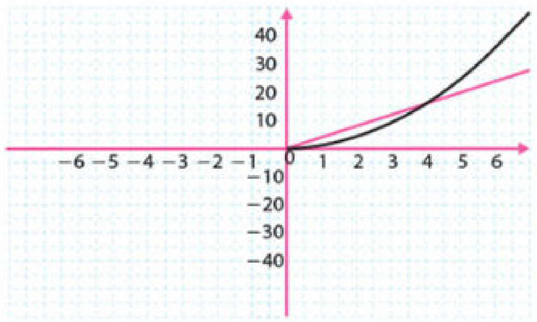
d) ¿Qué diferencias encuentran entre el crecimiento de $y = x$ y $y = x + x$?

____

e) ¿Qué diferencias observan entre el crecimiento de $y = x$, $y = x + x$ y el de $y = x^2$?

____

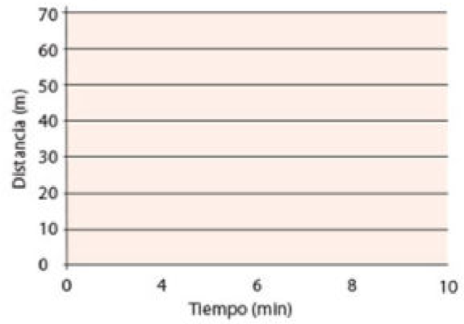
2. En la Actividad 2, trabajaron con la siguiente gráfica.

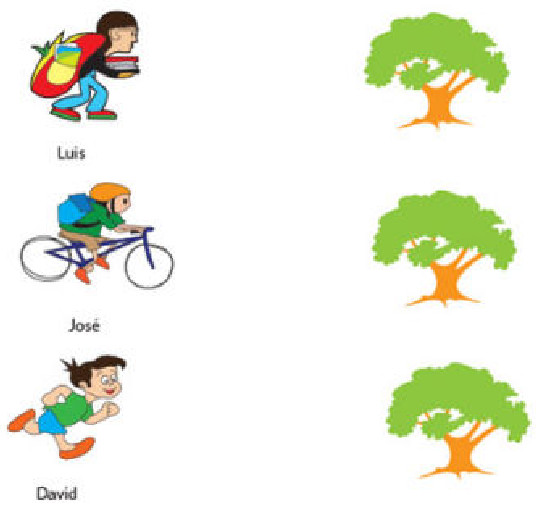


Vistas como funciones, estas expresiones tienen una representación en el plano cartesiano, incluso para valores negativos de *b*.

Completen en su cuaderno las gráficas de ambas funciones, para valores negativos de *b*.

3.[2] Grafiquen en el plano cartesiano de abajo las trayectorias de Luis, David y José, si se desplazan en línea recta desde un punto hacia un árbol. Al llegar, cada quien se detiene 2 segundos y luego regresa en línea recta al mismo punto.

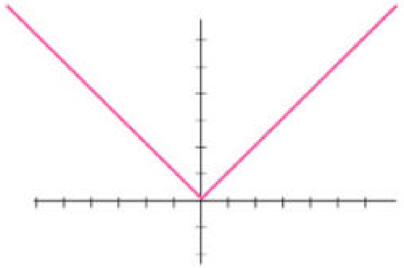




4. La siguiente gráfica representa una función cuadrática, ¿verdadero o falso? Justifiquen ampliamente su respuesta. ______________________________

____

____



Luego de haber realizado todas las actividades de la lección, ¿podrían describir las diferencias entre una función cuadrática y una lineal? Aprendieron que la representación gráfica de una función cuadrática es conocida como parábola y que su crecimiento o decrecimiento no es constante, ¿cuál es la forma de su gráfica y a qué se debe? Este comportamiento de la función cuadrática permite hacer modelos matemáticos de diversos fenómenos, como por ejemplo el tiro parabólico, la trayectoria de una bala y la trayectoria de un clavadista al lanzarse del trampolín.

Con toda esta información, respondan en su cuaderno lo siguiente: ¿qué elementos deben considerar para graficar una parábola?, ¿qué tipo de información proporciona?, ¿qué comportamiento debe tener un fenómeno para que se pueda modelar por una función cuadrática?

[2] Actividad inspirada del cuadernillo de trabajo: Cordero, F., Briceño, E., Cen, C., Gómez, K., Viramontes, D. y Zaldivar, D. (2009). *Modelación del movimiento en un cotidiano y su resignificación para el salón de clases.* Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

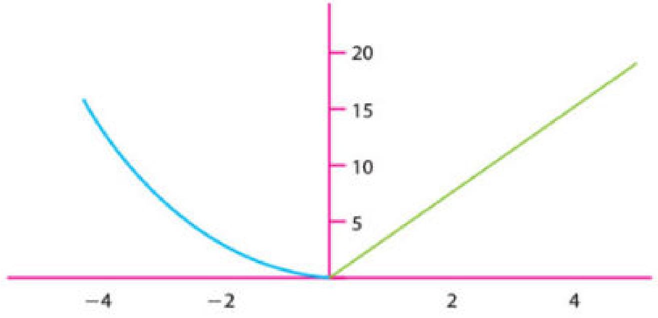
LECCIÓN 3.6

En esta lección aprenderás a leer y construir gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento como el llenado de recipientes.

PARA APRENDER

Actividad 1. Una gráfica en secciones

La gráfica siguiente se compone de dos secciones que distinguimos por colores: sección azul y sección verde.



a) ¿Qué tipo de expresión algebraica le corresponde a la sección azul? Justifiquen su respuesta

____

b) ¿Qué tipo de expresión algebraica le corresponde a la sección verde? Justifiquen su respuesta. ______________________________

c) Describan alguna situación que se pueda representar con esta gráfica.

____

d) ¿Qué características consideran que deba tener una situación que se describa con esta gráfica? ______________________________

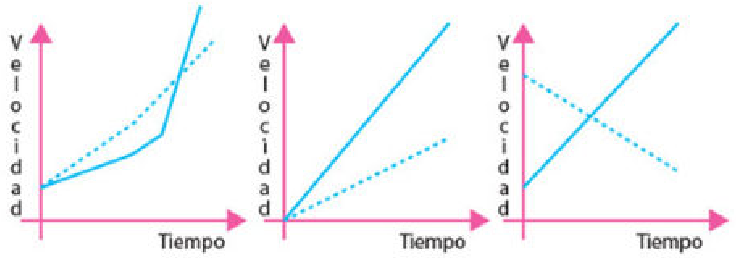
e) ¿Qué significado tendría la situación en el punto (0,0)?

____

Actividad 2. La carrera de caballos

El siguiente episodio describe la narración de un locutor de una carrera de caballos en la que, al final, la disputa estuvo entre "Venado" y "Alazán": *Los caballos entran a la recta final, van relativamente cerca uno al otro, cualquiera puede ganar si siguen así, pero en este momento, "Alazán" aumenta su velocidad constantemente rebasando claramente al "Venado". Gana "Alazán" por una gran diferencia.*

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas consideran que describe mejor lo narrado por este locutor sobre la carrera de caballos? Señálenla con una X.



b) ¿A cuál de los dos caballos representa la línea punteada y por qué?

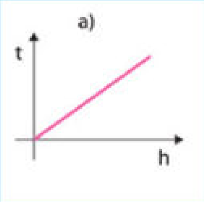
____

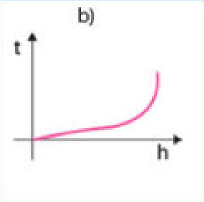
c) Formen un equipo de tres compañeros para hacer una narración que corresponda a las dos gráficas restantes.

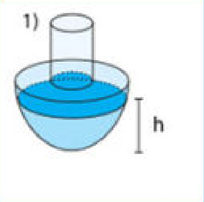
Narración 1:	**Narración 2:**
______________________	______________________
______________________	______________________
______________________	______________________

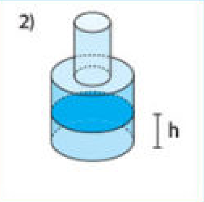
Actividad 3. Llenado de recipientes

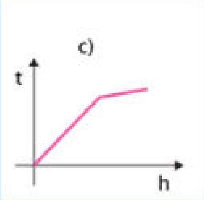
Relacionen cada una de las gráficas con la ilustración que le corresponda, en donde se muestra el llenado de recipientes. (Aunque en las imágenes parece que los recipientes no se llenarán por completo, supongan que así será.)

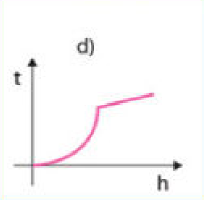
a)


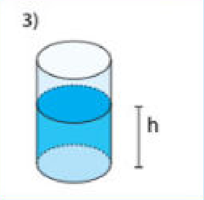
b)


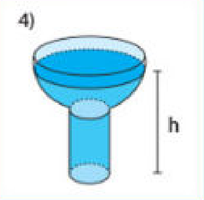
1)


2)


c)


d)


3)


4)


Presenten al grupo sus respuestas y con ayuda de su profesor resuelvan las dudas que surjan, así como las justificaciones de cada respuesta.

Una síntesis…

Como habrán notado, algunos problemas matemáticos se resuelven mediante el empleo de gráficas formadas por segmentos o secciones. Se llaman así porque están constituidas por varias partes distintas. ¿Qué fenómenos se pueden modelar con este tipo de gráficas y cuáles son sus características principales?

____

LOS MÉTODOS

Algunos fenómenos que no necesariamente siguen un patrón definido o una fórmula única dan lugar a gráficas por secciones. Por ejemplo, en una parte se puede tener una sección recta y en otra una curva, o bien las rectas pudieran tener diferentes inclinaciones.

Para construir gráficas por secciones, primero se deben determinar la región sobre el eje horizontal del plano cartesiano en que se define la primera parte de la gráfica, luego se tiene que localizar el punto donde inicia y termina la gráfica y por último se tendrá que repetir el procedimiento para otras regiones. El resultado final será una gráfica "a trozos" o por secciones.

Por ejemplo, en cierto periódico del país se indica que el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) informó que en septiembre de 2012 la inflación anual llegó a 4.77%. Estas variaciones se deben al costo de la canasta básica. Averigüen con su profesor qué significa *canasta básica*.

Fuente: INEGI: http://eleconomista.com.mx/mercados-estadisticas/2012/10/09/huevo-eleva-inflacion-maximos-2010-inegi (consultada el 12 de diciembre de 2012)

Si bien la gráfica anterior es una función continua, deben saber que los datos estadísticos representados en funciones son siempre aproximaciones que se hacen a partir de datos puntuales, es decir, de datos discretos. Sin embargo, dado que este tipo de gráficas serán cotidianas cuando lean los periódicos, es bueno que comenzar a reflexionar sobre ellas. Por ejemplo, de acuerdo con la gráfica presentada:

a) ¿Cuántas secciones conforman la gráfica?

____

b) ¿En qué sección se alcanzó el porcentaje máximo?

____

Si tuvieran que reproducir en su cuaderno la información correspondiente al año 2012, ¿cuál es el procedimiento que seguirían para graficar esa información?

____

____

____

GLOSARIO

Inflación: elevación notable del nivel de precios con efectos desfavorables para la economía de un país. Referencia: Diccionario de la Real Academia Española.

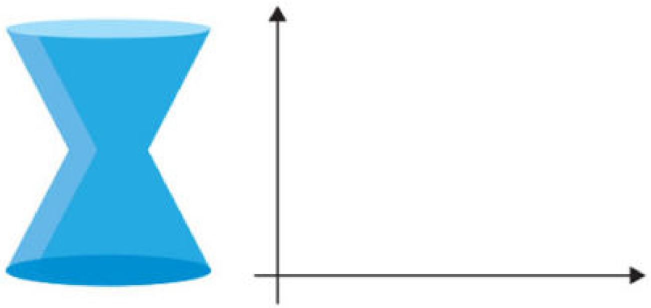
TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver los ejercicios 31 y 32 del Bloque III páginas 70 a 74 de la *GIS* (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (consultada en noviembre de 2013) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

PARA HACER

1. En la Actividad 2 de la Lección 3.5 analizaron la información de dos gráficas representadas en el mismo plano. Teniendo en cuenta lo anterior, responde lo siguiente:
   a) ¿Por qué consideran que la gráfica del perímetro se representa como una línea recta? ______
   b) ¿La representación del área del cuadrado puede ser una parábola? ¿Por qué? ______
2. El precio del timbre postal es de $1.50 si el paquete o la carta pesan menos de 100 g. Es de $2.50 si pesa entre 100 g y menos de 200 g. Y es de $3.50 si pesa entre 200 g y menos de 500 g. Por último, es de $5.00 si pesa entre 500 g y 1 kg. Los precios mayores al kilo se calculan directamente a partir de su peso en báscula y mediante fórmulas sencillas que conocen bien los cajeros.

   La profesora Sandra edita una revista de profesores de Física y envía por correo los volúmenes a sus colegas y amigos en paquetes. Calculen en su cuaderno el costo del envío si pone varias revistas de 100 g en cada paquete. Consideren las siguientes opciones.
   i. Cinco revistas y las envía en un único paquete. ______
   ii. Cinco revistas enviadas en dos paquetes, uno de 300 g y el otro de 200 g. ______
   iii. Cinco revistas en cinco paquetes. ______
   a) ¿Cuál envío será más caro y cuál más barato? ______
   b) Construyan una gráfica que muestre el costo por envío de revistas. Sugerencia: utilicen un sistema cartesiano. El eje x podría ser: *cantidad de revistas* y el eje y: costo del envío en un sólo paquete.
3. Dibujen la gráfica que represente el llenado de agua en el siguiente recipiente.



4. En la papelería "El flash" se anuncia:

Precio por copia:

Las primeras 100 copias: 25 centavos cada una

Más de 100: 20 centavos cada una

a) ¿Cuánto cobrarán por 100 copias? ______
b) ¿Cuánto por 110 copias?, ¿y por 15 copias? ______
c) Si necesitan 100 copias, ¿qué conviene más: pedir 100 o 110 copias? ¿Por qué? ______
d) Construyan una gráfica que muestre la variación del costo por copia, según se trate de menos de 100 copias y más de 100.
e) ¿Qué forma tiene la gráfica cuando son menos de 100 copias?, ¿y cuando son más de 100? ¿A qué se debe este cambio? ______

En esta lección aprendieron que existen fenómenos que no necesariamente siguen un patrón uniforme, sino que al contrario, se requieren dos o más gráficas (ya sea curvas o rectas) a fin de explicar dicho comportamiento. Para este tipo de fenómenos empleamos *las gráficas por secciones*. En equipos de tres, describan en su cuaderno tres situaciones o fenómenos que se puedan representar con este tipo de gráficas, enumeren sus características principales y realicen las gráficas correspondientes.

LECCIÓN 3.7

En esta lección aprenderás sobre la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes.

PARA APRENDER

Actividad 1. El torneo de basquetbol

En la secundaria "Nicolás Bravo" del estado de Guanajuato, se lleva a cabo un concurso entre los jugadores de basquetbol que consiste en premiar a quien anote el mayor número de canastas en la línea de tres puntos; si no se cumple con esto el tiro valdrá cero puntos. Los finalistas son Diego y Gabriela, que en sus pruebas anteriores han hecho una marca de aciertos del 79% y el 83%, respectivamente. El concurso tiene un total de 20 turnos cada uno.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Diego enceste? ____________. ¿Y cuál, de que Gabriela enceste? ____________

Reúnanse en equipos de tres compañeros y respondan los siguientes incisos. Justifiquen sus respuestas y escriban sus argumentos al lado de cada inciso; al final deberán exponer sus razones al resto del grupo.

b) En el primer turno, si Diego lanza el balón y lo encesta, ¿qué probabilidad tiene Gabriela de que al lanzar el balón lo enceste? ____________ ¿Por qué?

____

c) Y si Diego no encestara, ¿cambiaría la probabilidad que calcularon para Gabriela? ____________ ¿Por qué? ____________

Ahora que dieron sus respuestas, si se consideran los siguientes eventos:

Evento A: Diego acierta su tiro

Evento B: Gabriela acierta su tiro

¿son eventos dependientes o independientes? __________ Expliquen ampliamente sus razones. ____________

____

Si éstos son los eventos, ¿cuál sería el experimento?

____

Analicen de manera grupal las principales características de los eventos independientes, de acuerdo con la siguiente actividad.

Actividad 2. ¿Eventos dependientes o independientes?

En una urna, en la cual no se puede ver su contenido, hay cinco pelotas azules, cuatro rojas y tres negras. Sean los eventos:

Evento A: Sacar una pelota azul

Evento B: Sacar una pelota roja

Evento C: Sacar una pelota negra

a) Determinen cuál es la probabilidad de cada evento.

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el Evento A, es decir, cuál es el valor de P(A)? ____________

¿Cuál es el valor de P(B)? ____________

¿Cuál es el valor de P(C)? ____________

Formen equipos de tres compañeros y expliquen ampliamente el procedimiento que realicen en los incisos *b*) y *c*).

b) Si cada vez que se extrae de la urna una pelota y ésta se devuelve a la urna, ¿cuál es la probabilidad de extraer tres veces seguidas una pelota roja?

____

____

c) Si se extraen tres pelotas en forma consecutiva, sin devolverlas a la urna, ¿cuál es la probabilidad de que las tres pelotas sean rojas?

____

____

d) ¿Cuál es la diferencia entre la situación del inciso *b* y la del inciso *c*?

e) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota roja o negra? Expliquen cómo la calcularon. ____________

____

De manera grupal comenten cómo calcularon la probabilidad del inciso *b*) y la del inciso *e*), ¿cuál es la principal diferencia en la situación descrita en estos incisos?, ¿cómo se relaciona con la dependencia o independencia de los eventos?

____

____

Actividad 3. La moneda y el dado

Con una moneda y un dado hagan diversos experimentos. Para ello, trabajen en equipo.

Experimento 1. Lancen una moneda.

a) Propongan dos eventos para este experimento. ____________

b) ¿Cuál es el espacio muestral? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran cada uno de los eventos que describieron? ____________

Experimento 2. Lancen un dado regular de seis caras, con caras enumeradas del 1 al 6.

a) Propongan tres eventos para este experimento. ____________

b) ¿Cuál es el espacio muestral? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran cada uno de los tres eventos que describieron? ____________

Experimento 3. Lancen una moneda y un dado.

a) Sean los eventos:

Evento A: Que caiga sol

Evento B: Que caiga águila

Evento C: Que salga el número 1

Evento D: Que salga el número 2

Evento E: Que salga el número 3

Evento F: Que salga el número 4

Evento G: Que salga el número 5

Evento H: Que salga el número 6

i. ¿Cuál es el espacio muestral? ______________________________

ii. ¿Cuál es el valor de P(B)? ______________________________

iii. ¿Cuál es el de P(D)? ______________________________

b) Supongan que se lanzan la moneda y el dado al mismo tiempo:

i. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A?, ¿y ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A si se lanzara primero el dado y luego la moneda? ¿Por qué? ______________________________

____

ii. ¿Cuál es el espacio muestral de que se obtenga "un número par"?

____

____

iii. ¿Cuál es el espacio muestral de que se obtenga "un número impar"?

____

____

iv. ¿Cuál es el espacio muestral de que caiga "sol"?

____

____

c) Lancen la moneda y el dado.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y se obtenga un cinco simultáneamente? ¿Por qué?

____

____

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga águila y el número uno? ¿Por qué?

____

____

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga águila y se obtenga un número par? ¿Por qué?

____

____

De manera grupal, determinen el espacio muestral de cada experimento y la manera en que se relaciona con las probabilidades calculadas.

Una síntesis...

En diversas situaciones pueden distinguirse sucesos o eventos que son dependientes o independientes, ¿cuál es la principal característica que distinguieron de los eventos independientes?, ¿podrían hablar de la independencia de un evento sin conocer el espacio muestral? Compartan de manera grupal sus reflexiones.

LOS MÉTODOS

Para determinar la probabilidad de ocurrencia de eventos independientes, se deben considerar las características del experimento al que se refiere.

Un ejemplo. Se tienen dos dados regulares de seis caras. Si se lanzan los dados, entonces la probabilidad de que se obtenga en el primer dado el número cuatro es de $\frac{1}{6}$, dado que sólo se pregunta por lo que ocurrirá en un dado, independientemente de lo que ocurra en el otro, por lo que su probabilidad se refiere a un resultado favorable de los seis posibles. Pero si ahora nos preguntamos por la ocurrencia de los eventos:

Evento A: Obtener un número par en el primer dado.

Evento B: Obtener el número cinco en el segundo dado.

¿Cuál es el valor de P(A)? ¿Cuál el de P(B)? ______________________________

____

¿Cuál es la probabilidad de obtener un par y un cinco?, ¿importa en qué dado caigan los resultados deseados, por qué? ______________________________

____

La probabilidad de que ocurra el evento A y el evento B la podemos calcular tras conocer primero la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos, y luego multiplicar dichas probabilidades.

Esto es,

si la ocurrencia del evento A es P(A), y la del B es P(B), entonces la probabilidad de que ocurran los eventos A y B se expresa como: P(AyB).

Dicha probabilidad se determina por la multiplicación de la probabilidad de los eventos A y B. Por lo tanto,

$$P(A \text{ y } B) = P(A)*P(B)$$

Esto mismo lo pudieron verificar en el inciso *c*) de la Actividad 3 anterior.

Entonces,

¿qué caracteriza a los *eventos independientes*?

____

____

____

En estas actividades, distinguieron la independencia o dependencia de los eventos de un experimento aleatorio. En equipos de tres compañeros llenen la siguiente tabla, básense en las actividades que realizaron, y formulen dos ejemplos de experimentos que determinen eventos independientes y que además cumplan con las condiciones de las columnas de la tabla.

Experimento (Formúlenlos de tal manera que determinen eventos independientes)	¿Cuáles son los eventos de este experimento? ¿Qué los hace ser independientes?	¿Cuál es el espacio muestral?	¿Qué cambio puede hacerse al experimento para que se refiera a eventos dependientes?
Experimento 1:			
Experimento 2:			

Expongan al resto del grupo los experimentos que idearon. En el pizarrón anoten aquellas características esenciales de los eventos independientes y cópienlas en sus cuadernos.

PARA HACER

1.[1] En una empresa se van a sortear tres premios al azar entre 10 empleados. Una misma persona puede recibir uno, dos, tres o ningún premio, dado que cada premio se sorteará siempre entre los 10 trabajadores. En la empresa hay seis mujeres y cuatro hombres.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer reciba el primer premio? ¿Cuál de que lo reciba un hombre? ¿Por qué? ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres premios los reciba una mujer? __________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al haber recibido un hombre el primer premio, una mujer reciba el segundo premio? ____________________

d) ¿En este experimento hay eventos que son independientes? ¿En qué consiste o no esa independencia? ____________________

2. En un refugio de animales se agrupan los perros según su género (macho o hembra) y su tamaño (pequeño, mediano o grande). Sin embargo, en este refugio la adopción se realiza al azar, para que todos los animales tengan la misma oportunidad de tener un nuevo hogar. Hay 30 perros hembra, 10 perras pequeñas, 10 medianas y 10 grandes. Para los perros macho se tiene las mismas cantidades.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el perro que se adopte sea uno de tamaño grande sin importar su género? ____________________

---

[1] Actividad con modificaciones tomada del libro: Cáceres, J. (2007). Conceptos básicos de Estadística para ciencias sociales. p. 163. España: Delta Publicaciones.

b) ¿Qué probabilidad hay de que el siguiente perro que se adopte sea un perro macho de tamaño mediano? ____________________

c) ¿Los eventos de los incisos a) y b) son independientes? ¿A qué se debe esto?
____
____

d) Describan dos eventos de esta situación que cumplan con ser independientes. ____________________
____

3. Se lanzan tres monedas. Puede ocurrir que salgan águilas o soles. ¿Cuál es el espacio muestral?

Sean entonces los eventos:
Evento A: "Caen a lo más dos águilas"
Evento B: "Caen a lo menos dos águilas"
Evento C: "Las tres caen águila o las tres caen sol"

a) ¿Son los eventos A y B independientes? ¿Por qué? ____________________

b) ¿Son los eventos A y C independientes? ¿Por qué? ____________________

c) ¿Son los eventos A, B y C independientes? ¿Por qué? ____________________

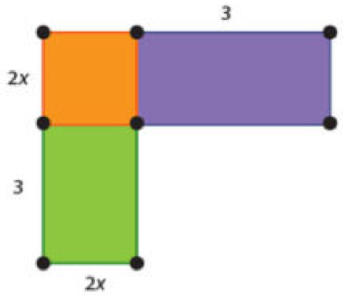
Expongan sus respuestas al resto del grupo, y digan cuáles son las características de estos eventos para determinar o no su independencia. Pidan la ayuda de su profesor, en caso de que surjan desacuerdos.

En esta lección pudiste trabajaron con diversas situaciones referentes a eventos independientes. Reflexionen en grupo las características que distinguen a los eventos independientes? ¿De qué manera influye, o no, el espacio muestral del experimento? ¿Por qué, al calcular la probabilidad de eventos independientes se hace mediante el producto?
Comenten de manera grupal sus reflexiones y determinen una manera para identificar aquellos experimentos que dan lugar a eventos independientes de aquellos que no originan este tipo de eventos.

EVALUACIÓN

1. **Para ayudar a Ximena**

Ximena intenta determinar el valor de la incógnita de la expresión algebraica que su profesor le había dado de tarea; para esto, dibuja la siguiente figura asignándole un área de 27 unidades cuadradas.



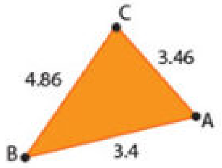
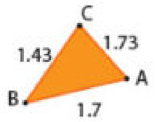
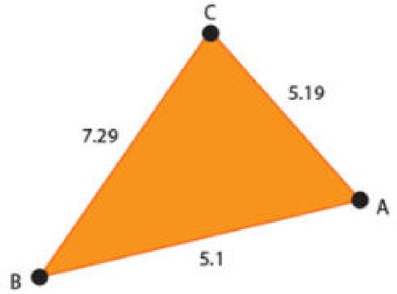
a) ¿Cuál es la expresión algebraica dada por el profesor? ________________________

b) Encuentra el valor de la incógnita. ________________________

c) Con este dibujo, ¿se pueden determinar todas las soluciones de la ecuación? Explica tu respuesta. ________________________

2. **A qué razón**

a) Observa la figura original y determina a qué razón están las figuras de su derecha.

Triángulo original	Triángulo a razón de______	Triángulo a razón de______
		

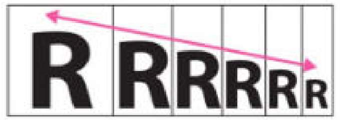
b) Otra relación es la que determinan la segunda y tercera figuras. Escribe a qué razón se encuentran.

____

3. **Figuras homotéticas**

El manual de una copiadora da la siguiente instrucción:

ZOOM
Las escalas de reproducción se pueden modificar en incrementos del 1%



A continuación se dan las medidas del alto y ancho de una imagen que se requiere ampliar.

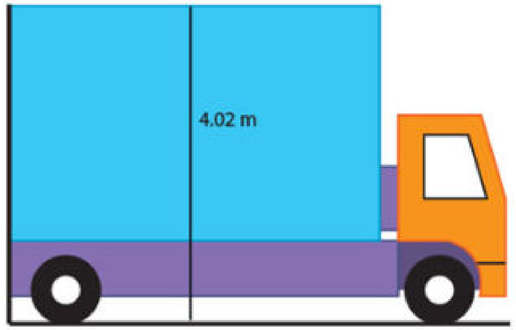


Figura 1


Tamaño
Alto: 4.9 cm
Ancho: 7.6 cm

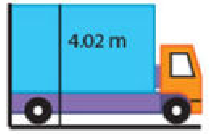
a) ¿Cuánto se deberá incrementar el alto y ancho de la imagen para que crezca 15%?

____

b) ¿La nueva imagen será homotética con la original? Argumenta tu respuesta.

____

c) Determina si las siguientes imágenes son homotéticas con la figura 1 del ejercicio anterior.

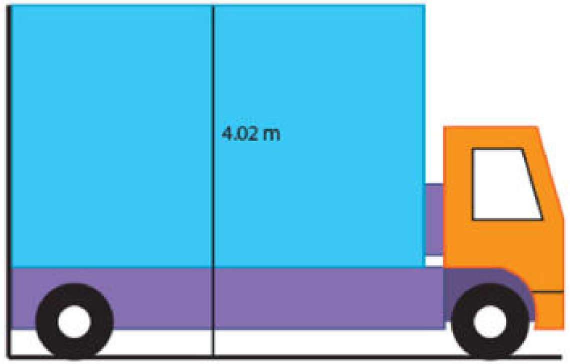



Tamaño
Alto: 1.9 cm
Ancho: 2.9 cm

¿Es homotética?________________________

____

EVALUACIÓN



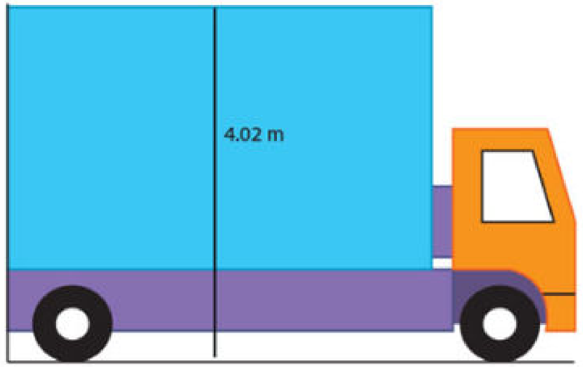

Tamaño

Alto: 5.4 cm

Ancho: 8.4 cm

¿Es homotética? ____________________

____




Tamaño

Alto: 5.5 cm

Ancho: 8.6 cm

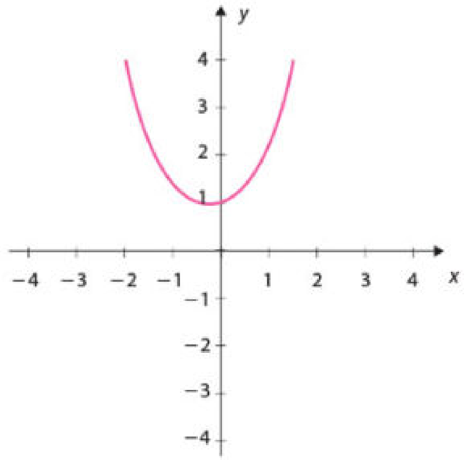
¿Es homotética? ____________________

____

4. La posible expresión correcta

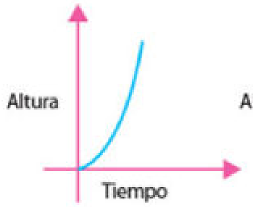
De los siguientes incisos encierra el que tenga la expresión algebraica de la gráfica presentada.

- *a*) $x^2 + x + 1$
- *b*) $x^2 - 0.5x + 1$
- *c*) $-x^2 + 0.5x - 1$
- *d*) $x^2 - x - 1$

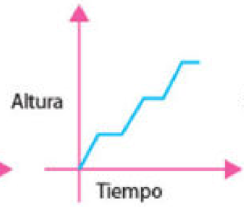


5. ¡Elevador en movimiento!

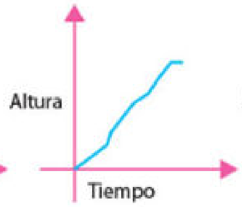
Las gráficas que aparecen a continuación representan la altura que alcanza un elevador en movimiento, en función del tiempo. De los siguientes incisos encierra el o los que tengan la(s) gráfica(s) que representa(n) el hecho de que el elevador no se detuvo.



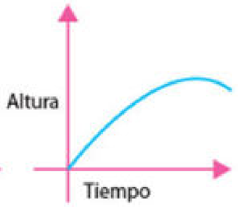
I



II



III



IV

- *a*) La gráfica IV
- *b*) La gráfica II y III
- *c*) Las gráficas I y IV
- *d*) La gráfica I
- *e*) Las gráficas III y IV

Da una explicación que fundamente tu respuesta.

Autoevaluación

Reflexiona acerca de lo que has aprendido en este bloque para resolver los problemas anteriores. Reproduce esta tabla en tu cuaderno y complétala considerando una escala del 1 al 5, donde 1 es "Totalmente en desacuerdo" y 5 "Totalmente de acuerdo".

Utilicé en la resolución de situaciones	Logré comprender y aplicar los conocimientos al resolver situaciones con	Usaría en la vida cotidiana lo que aprendí con
las ecuaciones de segundo grado.		
las propiedades de congruencia y semejanza de triángulos.		

Coevaluación

Con un par de compañeros intercambien sus evaluaciones, comenten y comparen las respuestas que propusieron en ellas; analicen las coincidencias y diferencias. Preparen una explicación para cada problema de la evaluación y conviertan sus inquietudes o dificultades en preguntas para compartirlas con el grupo y su profesor. Reflexionen también con sus compañeros y profesor, sobre lo respondido en la tabla de autoevaluación. Es importante compartir las dificultades y las fortalezas con tus compañeros; aprovechen ese espacio para aclarar cada duda que tengan y consolidar sus conocimientos.

Los invitamos a que después del debate completen una tabla que represente el consenso del grupo. Esta experiencia les servirá para consolidar sus aprendizajes antes de pasar al siguiente bloque.

BLOQUE 4

El techo de la vivienda tradicional maya, que se puede observar en la figura de abajo, se caracteriza por tener una forma peculiar; esto se debe a la importancia que tiene para esta cultura que las casas puedan resistir fenómenos naturales como los huracanes y las altas temperaturas. Las medidas ideales del techo generalmente son nueve metros de largo en la parte inferior y seis metros de largo en la parte superior, con una altura de tres metros. Un aspecto relevante de estos techos es su inclinación. Comenta con tus compañeros con qué figuras geométricas se puede representar el techo y cómo harían para calcular su inclinación.

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Techo de vivienda maya

LECCIÓN 4.1

En esta lección aprenderás a obtener una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

PARA APRENDER

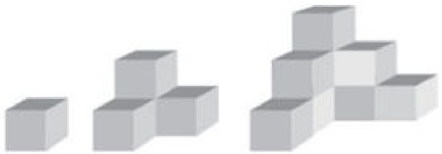
Formen equipos para discutir las actividades de esta lección, donde analizarán con sus compañeros diferentes situaciones en las cuales será necesario que determinen expresiones algebraicas cuadráticas que involucran sucesiones.

Actividad 1. Puntos y más puntos

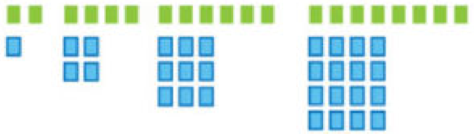
Las sucesiones de imágenes que se muestran a continuación, que vieron en la Lección 1.1, responden a una regla que determina la cantidad de elementos en cada una de ellas. Observen cómo se incrementa la cantidad de elementos en cada caso y dibujen dos figuras más de la sucesión. Por último, determinen una regla o expresión algebraica para cada caso.

Posición	1	2	3	4	___	___
Sucesión					____________	____________
Número de elementos: Expresión algebraica:	1	___	___	___	___	___

Posición	1	2	3	4	___	___
Sucesión					____________	____________
Número de rectángulos: Expresión algebraica:	2	___	___	___	___	___

Posición	1	2	3	___	___
Sucesión				____________	____________
Número de cubos: Expresión algebraica:	1	___	___	___	___

Escriban ahora una regla o expresión algebraica que les permita determinar el número de elementos que hay en cada posición de la siguiente sucesión:

Posición	1	2	3	4	___	___
Sucesión					____________	____________
Número de elementos: Expresión algebraica:	3	8	___	___	___	___

¿Cuántos elementos tendría la figura ubicada en la décima posición de la sucesión? ________ ¿Cuántos elementos tendría la posición enésima de la sucesión, es decir, la posición "n"? ________Analicen con sus compañeros la estrategia que utilizaron para determinarla.

Otra manera de determinar la expresión algebraica de la sucesión de figuras es utilizar el llamado *método de las diferencias*. Para ello completen la siguiente tabla:

TABLA 1

Posición (x)	1	2	3	4	5	6
Número de elementos (y)	4	9	16			
Primera diferencia (Δy)		9 − 4 = 5	16 − 9 =	__ − 16 =		
Segunda diferencia ($\Delta^2 y$)		7 − 5 = 2	__ − __ = 2			

Observen que para completar la fila "Primera diferencia", se deben restar los valores que aparecen en dos celdas consecutivas de la fila anterior ("Número de cuadros"). En tanto que para completar la fila "Segunda diferencia", hay que tomar los valores que aparecen en dos celdas consecutivas de la fila "Primera diferencia" y restarlos. ¿Qué regularidades encuentran en estas dos filas? Analícenlo con sus compañeros.

____

a) Observen la siguiente sucesión. Dibujen al menos dos figuras más de la sucesión, determinen la cantidad de rectángulos para cada una de ellas y completen la tabla.

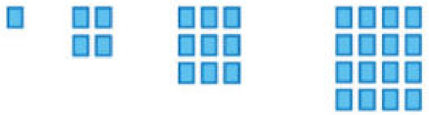
Posición	1	2	3	4	___	___
Sucesión					____________	____________
Número de rectángulos:	1	___	___	___	___	___

TABLA 2

Posición (x)	1	2	3	4	5	6
Número de rectángulos (y)						
Primera diferencia (Δy)						
Segunda diferencia ($\Delta^2 y$)						

¿Qué regularidades encuentran en las filas? Analícenlo con sus compañeros. ______

____

b) En los incisos anteriores determinaron las expresiones algebraicas correspondientes y observaron que se tratan de expresiones algebraicas cuadráticas. Completen ahora la tabla correspondiente a la expresión general $y = ax^2 + bx + c$.

TABLA 3

X	1	2	3	....
Y	$a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$		...
Primera diferencia (Δy)	$(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b$		...	
Segunda diferencia ($\Delta^2 y$)	$(5a + b) - (3a + b) = 2a$			

Comparen ahora la Tabla 1 con la Tabla 3 celda por celda. Una está construida numéricamente y la otra algebraicamente. Al comparar lo que aparece en la primera celda de las filas se puede determinar el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2a = 2 & \text{(primera celda de la fila “segunda diferencia”)} \\ 3a + b = 5 & \text{(primera celda de la fila “primera diferencia”)} \\ a + b + c = 4 & \text{(primera celda de la fila “}y\text{”)} \end{cases}$$

Resuelvan este sistema de ecuaciones para determinar la expresión algebraica que describe cualquier grupo de puntos de la sucesión presentada en el inciso *b*). Comparen sus resultados con los de otros compañeros para saber si lograron la misma expresión algebraica.

c) Lleven a cabo el mismo ejercicio comparando la tabla 2 con la 3 y determinen la expresión algebraica que describe cualquier grupo de cuadros de la sucesión presentada en el inciso *c*).

Una síntesis…

En lecciones anteriores has visto que al describir un fenómeno (ya sea la caída de una pelota desde cierta altura, la fisión binaria de hongos o el simple hecho de agregar cubitos de manera regular) obtenemos un planteamiento con expresiones algebraicas.

Para todo fenómeno que pueda describirse mediante una tabla, donde se registren los valores involucrados (tiempo-distancia, posición-número de puntos, etcétera), se pueden calcular las primeras diferencias. Por ejemplo, analicen con sus compañeros la siguiente sucesión de números luego de completar esta tabla:

x	y	Primera diferencia	Segunda diferencia
−1	6	1 − 6 = −5	−5 − ___ =
0	1	−4 − 1 =	
1	−4		
2	−9		
…			

En este caso se observa una **constante** en la columna de las primeras diferencias y, por tanto, se puede afirmar que ese fenómeno es lineal. ¿Cómo es la segunda diferencia de las funciones lineales? __________ Discutan con sus compañeros y profesor que su expresión algebraica es del tipo $y = ax + b$ y argumenten ampliamente la idea. ____

Cuando la *segunda diferencia* de los valores de un fenómeno es constante, tal como observamos en las actividades de esta lección, concluimos que es una de las características fundamentales de las expresiones algebraicas del tipo: ______________ ______________________________.

Por ejemplo, completa en la siguiente tabla.

x	y	Primera diferencia	Segunda diferencia
−1	10	5 − 10 = −5	
0	5	6 − 5 =	____ − (−5) =
1	6		
2	13		
3			
4			
5			
…			

Observamos que en la columna “Segunda diferencia” aparece una constante, por tanto, el arreglo numérico estudiado es de tipo cuadrático y su expresión algebraica es: $y =$ ____

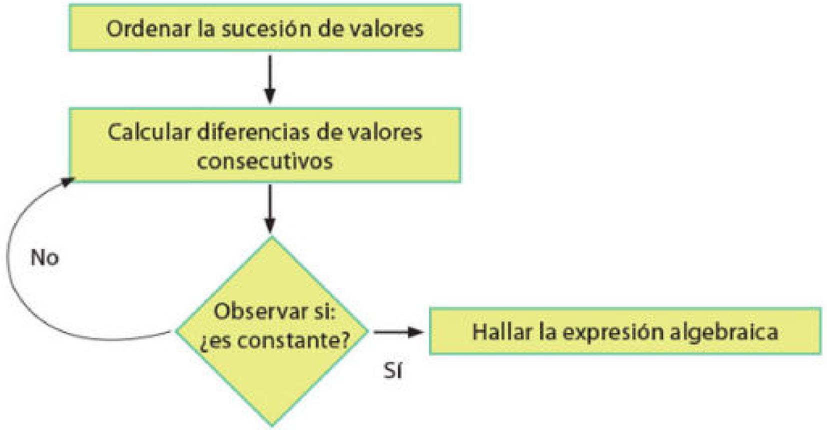
Conociendo los valores de x, así como la primera y segunda diferencia, podemos determinar los parámetros de la expresión algebraica del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

¿Sabías que?

Galileo Galilei diseñó planos inclinados para determinar la caída de un objeto y una de las herramientas matemáticas que más utilizó fue la diferencia de los valores medidos en los experimentos realizados, método similar al que se propone en esta lección. Les recomendamos que exploren la página del Museo Virtual Galileo en http://www.museogalileo.it/ (consultada en noviembre de 2013) donde encontrarán simulaciones de los experimentos que realizaba Galileo.

LOS MÉTODOS

Para determinar la expresión algebraica que describa el comportamiento de una sucesión (de números, figuras, literales, etcétera.) es conveniente:



TIC

En la página http://www.televisioneducativa.gob.mx/index.php/videos-telesecundaria encontrarán *Programa 40: El método de las diferencias*, correspondiente al Bloque IV del programa de Matemáticas 3, realizado por TV Educativa de la SEP. Busquen esta liga y anoten las explicaciones que en ella se proporcionan, confeccionen un informe. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Efectivamente:

1. Comiencen ordenando de manera creciente o decreciente el par de valores que están involucrados, ubicándolos en columnas o filas, de acuerdo con el modelo que más les guste.
2. Calculen la *primera diferencia* de los valores involucrados. Para ello, tomen dos valores consecutivos y réstenlos. Coloquen en la tercera columna (fila) la diferencia hallada entre los valores utilizados.
3. Si todas las primeras diferencias calculadas son iguales (es decir, constantes), significa que se trata de un fenómeno lineal cuya expresión general es:

____

____

____

4. Si no se encuentra una constante en la *primera diferencia*, entonces…

____

____

____

5. Si no hay una constante en la *segunda diferencia* de los valores involucrados, podremos afirmar que no se trata de un fenómeno cuadrático. Entonces, ¿qué tipo de fenómeno consideran que representaría una función cuya tercera diferencia es constante? Coméntenlo con sus compañeros y argumenten sus respuestas.

____

____

____

PARA HACER

TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver las actividades 35 a 37 del Bloque IV, páginas 86 a 94 de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf, (consultada en octubre de 2013) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

1. Observen con cuidado las siguientes tablas y determinen cuáles de ellas describen comportamientos lineales, cuadráticos o ninguno de ellos. Determinen también las expresiones algebraicas asociadas a cada tabla. Argumenten ampliamente sus respuestas.

x	*y*
0	5
1	2
2	−1
3	−4
4	−7
5	−10
6	−13
7	−16
8	−19
9	−22
10	−25

x	*y*
0	1
1	2
2	9
3	28
4	65
5	126
6	217
7	344
8	513
9	730
10	1001

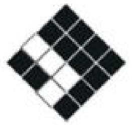
x	*y*
0	−3
1	−2.5
2	−2
3	−1.5
4	−1
5	−0.5
6	0
7	0.5
8	1
9	1.5
10	2

x	*y*
0	1
5	26
7	50
3	10
4	17
10	101
8	65
1	2
2	5
9	82
6	37

x	*y*
0	2
5	7
7	9
3	5
4	6
10	12
8	10
1	3
2	4
9	11
6	8

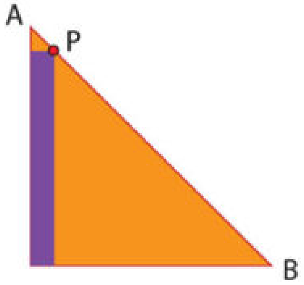
x	*y*
10	60
5	5
7	21
3	−3
4	0
0	0
8	32
1	−3
2	−4
9	45
6	12

2. En la siguiente sucesión de figuras, los cuadraditos blancos se consideran espacios no usados, por lo que únicamente se tendrán en cuenta los negros.

Posición	1	2	3	4	5	___
Sucesión						___
Número de cuadraditos:	0	2	6	12	20	___

Construyan una expresión algebraica que sirva para determinar el número de cuadraditos de cualquier figura, de acuerdo con lo visto en esta lección. Verifiquen la respuesta con la hallada en el punto 8 de la Lección 1.1.

3. Construyan un triángulo rectángulo isósceles donde sus lados iguales midan 10 cm y marquen un punto *P* como se observa en la figura. Imaginen que dicho punto sólo se puede desplazar sobre el segmento $\overline{AB}$ del triángulo. Dibujen el punto *P* en diferentes posiciones y determinen el área del rectángulo que se forma. Organicen sus cálculos en una tabla donde *x* esté en la primera columna y las áreas determinadas en la segunda. Determinen la expresión algebraica correspondiente y verifiquen la respuesta con la hallada en la Actividad 3 de la Lección 1.1.



x	Área	Primera diferencia	Segunda diferencia
1	9		
2	16		
3			

4. Reúnanse con dos compañeros y generen tres tablas de valores *x* y *y*, de las cuales sólo una responda a un fenómeno cuadrático.

a) Analicen con ellos cómo llevar a cabo este trabajo y cómo determinar si dos de las tablas generadas no son cuadráticas. Escriban en su cuaderno las conclusiones.

b) Intercambien las tablas tablas con otro equipo y determinen cuál es la tabla que corresponde a un fenómeno cuadrático que proponen sus compañeros. Escriban en su cuaderno una manera de asegurar que se trata de un fenómeno cuadrático.

En esta lección trabajaron con sucesiones cuya regla general es una expresión algebraica cuadrática y conocieron el método de las diferencias para determinarla. Este método fue muy utilizado en el siglo XVII cuando aún se estaba estabilizando la idea de función y del uso de expresiones algebraicas que describieran fenómenos.

Estudiar el comportamiento de las diferencias de términos consecutivos de una sucesión de números nos permite determinar si se trata de un crecimiento o decrecimiento lineal, cuadrático, cúbico, etcétera; es decir, se puede saber si corresponde a un polinomio de cierto grado.

Exploren las tablas que originan expresiones como: $y = x^3$; $y = 2x^3 + 3x$ y construyan las tablas correspondientes donde añadan una columna titulada "Tercera diferencia", en la cual se restarán los valores de dos celdas consecutivas de la columna "Segunda diferencia". ¿Qué observan en este caso? ¿Qué pasaría con la expresión de cuarto o quinto grado? Analicen lo anterior con sus compañeros y profesor y escriban en sus cuadernos las conclusiones a las que arribaron.

LECCIÓN 4.2

En esta lección aprenderás a analizar las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo, así como a construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

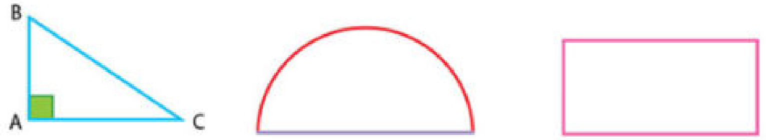
PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección con base en lo que han aprendido sobre cilindros, conos y esferas. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1

Don Raúl es un vendedor de lámparas. La empresa que le surte las lámparas incrementó los precios, por ello decidió elaborarlas él mismo. Se le ocurrió que, como tiene experiencia fabricando modelos sólidos, puede usar esos conocimientos y construirlas de mimbre, ya que las solicitan muchas personas por su duración y elegancia. Teniendo en mente la idea de fabricar modelos para sus lámparas, don Raúl empezó por utilizar figuras geométricas conocidas, por ejemplo: un triángulo rectángulo, una semicircunferencia y un rectángulo.

Material:
Juego geométrico
Tijeras
Tres popotes
Hojas blancas
Conos de papel



En equipo, ayuden a don Raúl en la tarea de construir lámparas. Para ello, lleven a cabo lo siguiente:

a) Dibujen en su cuaderno las figuras geométricas que eligió don Raúl y recórtenlas.
b) Tomen un popote y péguenlo sobre uno de los lados de una de las figuras (en el caso del semicírculo, sobre su diámetro).
c) Giren el popote varias veces en movimientos continuos y obsérvenlos.

Observen que el popote es el eje de rotación de cada figura.
Repitan este procedimiento para el resto de las figuras y contesten lo siguiente para cada caso.

- ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al girar el triángulo? ____________ ¿Qué cuerpo geométrico origina el giro de un semicírculo? ____________ ¿Cuál se obtiene al rotar el rectángulo? ______________________________
- Dibújenlos y argumenten sus respuestas en su cuaderno.

Comparen sus resultados con los de otro equipo y valídenlos con su profesor. ¿Obtuvieron los mismos resultados? ¿Por qué?

____

____

GLOSARIO

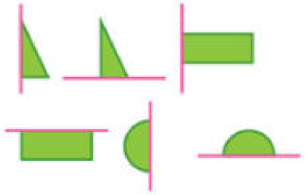
Eje de rotación:
en geometría, es una línea recta respecto a la cual una figura geométrica puede girar. Por ejemplo, en un cono circular el eje es la recta que va del vértice del cono al centro de la base, a partir de la cual se hace rotar la hipotenusa de un triángulo rectángulo sobre un cateto.

Actividad 2

Don Raúl considera que los cuerpos geométricos que obtuvo, bien podrían convertirse en diseños interesantes para sus lámparas. Se da cuenta, además, de que la base fundamental de estos cuerpos generados son justamente el triángulo rectángulo, el rectángulo y la semicircunferencia. Asimismo, reconoce que puede ubicar el eje (popote) de distintas maneras en esas figuras geométricas y que quizás puedan originar otras formas de lámparas de mimbre. Por ejemplo, don Raúl considera los siguientes casos: (supongan que la línea rosa es el popote).

TIC

Para observar cómo se generan la esfera, el cono y el cilindro pueden ingresar a la página http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/redondos/revoluc.htm (consultada en noviembre de 2013) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.



Imaginen ahora que giran cada figura en movimientos continuos alrededor de su eje. Con base en ello, analicen y expliquen lo siguiente.

- ¿Qué figuras se forman en cada caso? ¡Dibújenlas en su cuaderno!
- ¿Que figura se obtiene si se hace girar cada forma alrededor del popote (tomándolo como eje de rotación)? Indiquen para cada caso las diferencias (en cuanto a las bases, las alturas o si fuera el caso, la forma), si las hubiera.

  ____
- ¿En alguna figura no hay cambios? ¿En qué caso son diferentes?

  ____

Actividad 3

Don Raúl se percató que de un triángulo rectángulo, un rectángulo y una semicircunferencia pudo obtener un cono, un cilindro y una esfera respectivamente como forma para sus lámparas de mimbre. Su intención ahora es obtener versiones más pequeñas de las lámparas, usando para ello papel de china, el cual es bastante vistoso y colorido. don Raúl comienza la elaboración de los diseños pequeños que tendrán forma de cono pero con tapa, tomando como base un cono de papel de los que usan para tomar agua. No obstante, se pregunta dónde realizar cortes y qué medidas deberán tener sus lámparas.

Ayuden a Don Raúl a fabricar las versiones pequeñas de sus lámparas, las cuales serán más grandes que el cono de papel. Utilicen papel blanco y conos de papel para llevar a cabo lo siguiente:

a) Copien el tamaño del círculo del cono.
b) Con mucho cuidado corten longitudinalmente el cono de papel, desde la base hasta el vértice, y extiéndanlo. Copien la forma en una hoja en blanco.
c) Determinen las relaciones entre las medidas que deben tener las partes de los diagramas, a fin de que sea posible reconstruirlo físicamente. Es decir, identifiquen y midan la altura del cono y determinen el diámetro de la base o "tapa".
d) Tomando en cuenta las relaciones que reconocieron en el cono de papel, propongan ahora algunas medidas para las lámparas de papel de china.

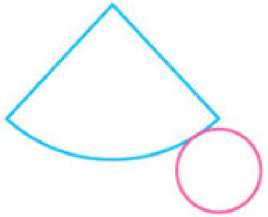
A la figura que obtuvieron con ayuda del cono de papel se le conoce como desarrollo plano del cono. La forma de este desarrollo es la siguiente:

GLOSARIO

Llamamos **desarrollo plano** de un cuerpo geométrico a la representación bidimensional de las superficies que lo limitan, de tal manera que al doblarlas puedan formar el cuerpo.

GLOSARIO

Prototipo: Ejemplar original o primer molde en que se fabrica una figura u otra cosa.



Este desarrollo plano le será útil a don Raúl como prototipo al momento de realizar lámparas en papel de china con forma de cono con tapa.

Para continuar ayudando a Don Raúl, elaboren ahora en equipo el desarrollo plano de un cilindro y determinen la relación entre sus medidas.

Una síntesis…

En las actividades anteriores se apoyaron de las propiedades de diferentes cuerpos que se generan al hacer girar ciertas figuras geométricas alrededor de un eje fijo de rotación. Específicamente, don Raúl utilizó un triángulo rectángulo, una semicircunferencia y un rectángulo.

Entre los cuerpos que se han estudiado hasta el momento y que se generan a partir de las figuras geométricas mencionadas anteriormente, se encuentran el cono circular recto, el cilindro recto y la esfera.

a) Con base en lo que aprendieron, respondan lo siguiente: ¿Qué utensilios, de los que se usan en el hogar, se parecen a los cuerpos geométricos que recién estudiaron? ¿A qué materiales, de los que usan en el salón de clases?

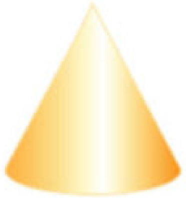
____

¿Por qué esos utensilios tienen esa forma y no otra?; es decir, ¿qué ventajas brindan a los utensilios esas formas específicas?

____

b) Describan las características de los siguientes cuerpos geométricos:

Cono circular recto



____

____

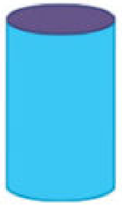
____

____

____

____

Cilindro recto



____

____

____

____

____

____

TIC

Para aprender más sobre los desarrollos planos, pueden consultar la siguiente página de internet: http://linux.ajusco.upn.mx/~transpatricio/gregoria/GregoriaWebSite/seccion5/enalgunas/sobrecontenidos/elcilindro.html (consultada en octubre de 2013) Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Esfera

____

____

____

____

____

____

c) ¿Por qué los vasos de papel tienen forma de cono y no de cilindro, por ejemplo? ____________________ Compartan sus conjeturas con sus compañeros.

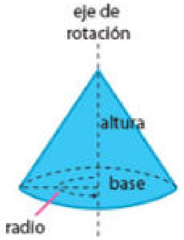
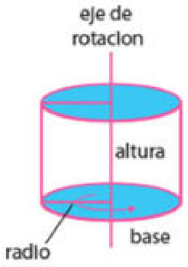
LOS MÉTODOS

A lo largo de las actividades anteriores ayudaron a don Raúl a desarrollar e identificar formas de ciertos cuerpos geométricos que se generan al hacer girar determinadas figuras geométricas alrededor de un eje.

Estos cuerpos se conocen como cuerpos o sólidos de revolución, pues se forman al hacer girar una figura plana alrededor de una recta llamada *eje de rotación*; son ejemplos de estos cuerpos el cono, el cilindro y la esfera. Ahora, resulta importante que se identifiquen las características y elementos de cada uno de estos cuerpos geométricos.

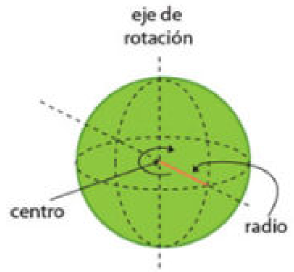
Reunidos en equipos, completen la siguiente tabla que se refiere a los cuerpos de revolución con los que está trabajando don Raúl.

Describan con sus palabras los principales elementos de cada uno de ellos.

<table>
<tr><th>Cuerpo geométrico</th><th>Principales elementos</th><th>¿Cómo se generó?</th></tr>
<tr><td>
</td><td>La base
La altura
El radio
El vértice/eje</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>Las bases
El radio
La altura</td><td></td></tr>
</table>

GLOSARIO

Cuerpos de revolución: sólido o cuerpo que se forma por el giro de una superficie alrededor de un eje. En dicha rotación todos los puntos de la superficie se mantienen a la misma distancia del eje.

	El centro El radio	

PARA HACER

1. Tracen en su cuaderno el desarrollo plano de un cilindro cuyas medidas sean 4 cm de radio y 10 cm de altura. Recórtenlo y armen el cilindro.
2. Dibujen en su cuaderno el desarrollo plano de un vaso en forma de cono que mida 4 cm de radio y 10 cm de altura. Armen el vaso y verifiquen que tiene las medidas indicadas.
3. Analicen qué tipo de cuerpo de revolución se obtiene cuando se hace rotar alrededor de un popote un paralelogramo que no sea un rectángulo. Dibújenlo en su cuaderno.
4. Analicen qué tipo de cuerpo de revolución se obtiene cuando se hace girar un triángulo que no es rectángulo. Dibújenlo en su cuaderno.
5. Construyan un triángulo rectángulo de lados que midan 3, 4 y 5 cm. Gírenlo sobre cada una de sus aristas. Observen que pueden generar tres cuerpos de revolución. Imaginen que arman un vaso de papel con los diversos cuerpos de revolución generados, ¿cuál tendrá el mayor volumen? ______________ Justifiquen su respuesta y compárenla con los argumentos de sus compañeros.
6. De acuerdo con la **conjetura** anterior, ¿de qué depende que un cuerpo tenga un volumen mayor o menor que el del cono y el de las figuras que analizaron?

   ____

7. Con un rectángulo de tres y cinco unidades por lado se generan dos cilindros de diferentes medidas al hacer girar el rectángulo en cada uno de los lados alrededor de un eje de rotación, ¿cuál cilindro será el que tenga mayor volumen? ____________________ Justifiquen y compartan sus respuestas.
8. Analicen el siguiente enunciado: *la esfera, a diferencia del cono y del cilindro, no tiene un desarrollo plano*. Reflexionen la contestación a la pregunta y propongan una forma de demostrar la veracidad o falsedad de la misma.

GLOSARIO

Conjetura: Juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones.

En esta lección aprendieron a anticipar las características de los cuerpos que se generan al hacer girar una superficie sobre un eje; también fueron capaces de reconocer y construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Analicen ahora la situación siguiente: Si se tiene un cono circular y lo truncamos; es decir, hacemos que pase un plano y que corte a la superficie del cono de manera paralela a la base circular del mismo. ¿Qué figura geométrica se hizo girar para obtener dicho cuerpo sólido?, ¿cómo sería ahora el desarrollo plano del cono truncado?

LECCIÓN 4.3

En esta lección aprenderás la noción de pendiente de una recta y su relación al ángulo que forma ésta en el plano con el eje de las abscisas y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

PARA APRENDER

En equipos de tres, analicen y resuelvan las siguientes actividades. Tomen nota de todos los asuntos que se examinen en ellas.

Actividad 1. Un tipo de techo para cada clima

En un manual de construcción encontramos el siguiente diagrama de viviendas. Pongan atención a la inclinación de los techos. Cada vivienda se recomienda para una zona climática distinta en función del escurrimiento del agua en caso de lluvia.

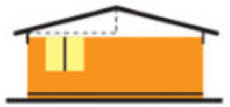


Diagrama 1

____

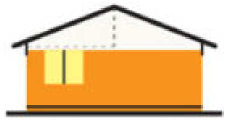


Diagrama 2

____

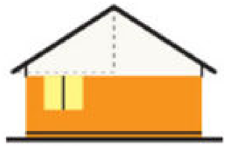


Diagrama 3

____

a) Escriban junto a la figura una de las siguientes zonas climáticas a la que consideren que corresponda cada techo: zona sin lluvias, con lluvias moderadas y lluviosa.

b) El manual indica que a cada inclinación del techo le corresponde una pendiente determinada, por tanto, informa que la pendiente puede ser de 20, 30 y 50 por ciento.

c) Indiquen a qué diagrama corresponde cada uno de esos porcentajes.

Analicen con sus compañeros, cómo consideran que se establecieron dichos porcentajes. Sugerimos que tomen medidas para establecer el criterio con que se determinó la pendiente.

Elaboren una definición de la pendiente del techo.

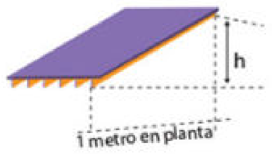
Actividad 2. Cálculo de la inclinación de los techos

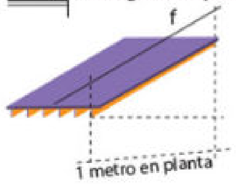
Para el cálculo de la pendiente de un techo se ha obtenido de internet un diagrama que tiene la leyenda "Sólo debes colocar los datos de tu proyecto y todo el cálculo es automático". Con base en lo anterior, respondan las siguientes preguntas.

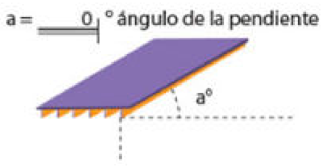
INCORPORAR EL VALOR DE PENDIENTE CONOCIDO 0°

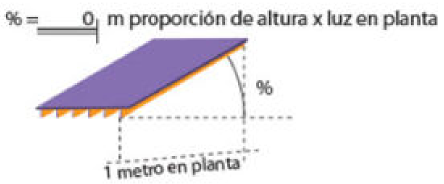
h = 0 m altura x metro en planta

f = 1 m longitud en pendiente









a) En el diagrama hay un valor que siempre se mantiene constante, ¿cuál es y a qué se refiere dicho valor? ____________________

b) ¿A qué se refieren las expresiones h, f, a° y %? ____________________

c) ¿En qué unidades se miden cada una de esas expresiones y por qué?

____

d) En el caso de la expresión a°, ¿por qué no se escribió en el diagrama la leyenda "1 m en planta"? ____________________

e) ¿Qué significa la expresión "ángulo de la pendiente"?

____

Actividad 3. Pendientes y escaleras

En un manual en internet se dan los siguientes criterios para la construcción de escaleras. En la Figura 1 encontraremos los nombres básicos de un escalón (huella y contrahuella). En la Figura 2 se da información más especializada sobre la escalera. Con el auxilio de dos de sus compañeros, analicen con todo detalle la Figura 2 e investiguen el significado de todos los elementos contenidos en la figura. Escriban en sus cuadernos las respuestas a las siguientes preguntas.

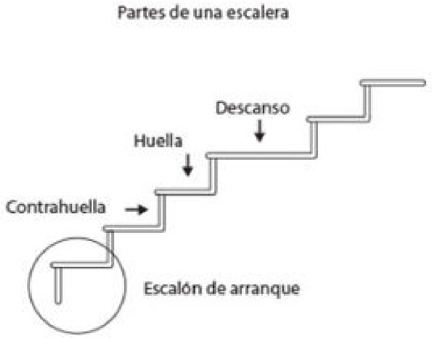


Figura 1

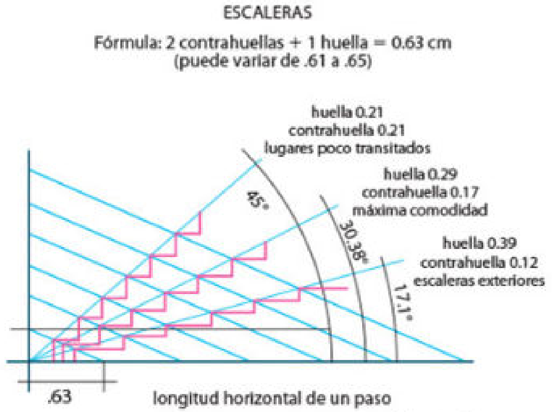


Figura 2

a) En la Figura 2, ¿qué se entiende por longitud horizontal de un paso?

____

b) Se puede observar que hay tres modalidades de escaleras, pero existe una relación entre la huella y la contrahuella. Expliquen con sus palabras qué significa la fórmula que aparece en la información.

c) Hay tres rangos de valores que producen tres tipos de escaleras: para exteriores, la de máxima comodidad y las poco transitadas.

i. Para cada uno de los rangos de escaleras, indiquen cuánto mide la huella y la contrahuella.

ii. La relación entre huella y contrahuella cambia (observen en la figura que la contrahuella aumenta). ¿Cuál sería la razón de la contrahuella y la huella en cada caso? ____________________

iii. Cada rango de escalera está asociado a un ángulo, ¿cuánto mide el ángulo?

____

d) ¿Cómo se establecieron los ángulos 17.1°, 30.38°, 45°? ____________________

GLOSARIO

Ángulo de inclinación de una recta: Ángulo que se forma entre dicha recta y el lado positivo del eje de las abscisas.

Actividad 4

En la Figura 3 observemos que el segmento horizontal está dividido en segmentos iguales. Con una escuadra se levantaron rectas perpendiculares en cada división de la recta horizontal hasta cortar a la curva dada y después se trazó una paralela a la horizontal en cada uno de los puntos de corte sobre la curva, obteniéndose la Figura 4.

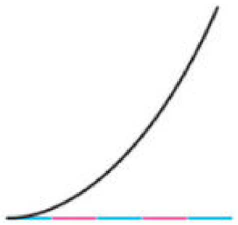


Figura 3

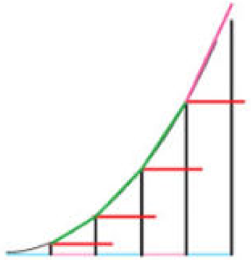


Figura 4

a) A partir de los trazos hechos se obtuvo una buena aproximación a cinco triángulos. ¿Son triángulos rectángulos? Argumenten su respuesta. ____________________

____

b) En cada triángulo el cateto horizontal siempre es igual, ¿por qué? ____________________

c) El cateto vertical para cada triángulo, ¿crece, decrece? ____________________

d) En cada triángulo marquen el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto horizontal, ¿se mantiene igual su magnitud?? ____________________

e) Extiendan la hipotenusa de cada triángulo hasta que corte con el eje horizontal, el ángulo que se forma, ¿es igual al del triángulo? ____________________

f) Repitan lo que se hizo en la Figura 3 en las siguientes figuras y responde para cada caso las mismas preguntas.

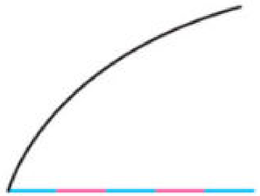


Figura 5

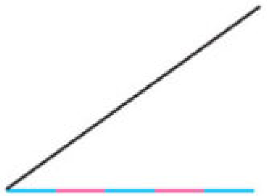


Figura 6

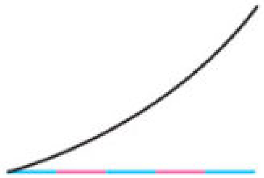


Figura 7

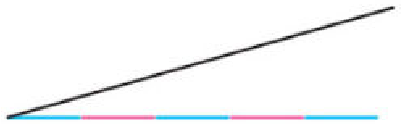


Figura 8

g) ¿Qué se puede decir de los triángulos obtenidos cuando la figura está formada por una recta? ______________________________

h) Analicen con más detalle las figuras 6 y 7 y con una regla graduada midan en cada figura el cateto horizontal y vertical de los triángulos que se obtienen. Completen la siguiente tabla.

	Figura 6		
	Longitud del cateto horizontal (LCH)	Longitud del cateto vertical (LCV)	Cociente LCV/LCH
Δ_1			
Δ_2			
Δ_3			
Δ_4			
Δ_5			

Figura 7		
Longitud del cateto horizontal (LCH)	Longitud del cateto vertical (LCV)	Cociente LCV/LCH

i) Por último, midan el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto horizontal en cada triángulo. ¿Es el mismo valor del ángulo en todos los casos? Expliquen.

____

GLOSARIO

Denominamos **pendiente** de la recta a la razón entre el cateto vertical y el cateto horizontal.

Una síntesis…

En la figura de abajo exploren los siguientes elementos que están asociados a la idea de pendiente e inclinación.

Con otros dos compañeros lleven a cabo las actividades propuestas y contesten lo que se pregunta. Sus conclusiones, discútanlas con su profesor.

a) Señalen y denle nombre al ángulo que se forma entre cada segmento y la recta AB. Marquen 3 puntos distribuidos de manera uniforme sobre cada segmento.

b) Ahora, para cada segmento tracen las líneas perpendiculares que unen la recta AB en cada segmento.

c) ¿Para qué segmento crecen con mayor rapidez las líneas perpendiculares que trazaste? ______________________________

d) Con sus compañeros, intenten establecer la relación entre el ángulo de inclinación de la recta, la rapidez de crecimiento de la ordenada y la pendiente.

____

e) ¿Es lo mismo el ángulo de inclinación de la recta y la pendiente?

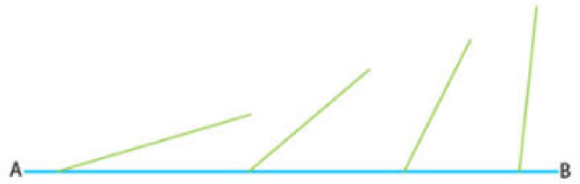
____

f) ¿Es igual la rapidez de crecimiento de la ordenada e inclinación de la recta?

____

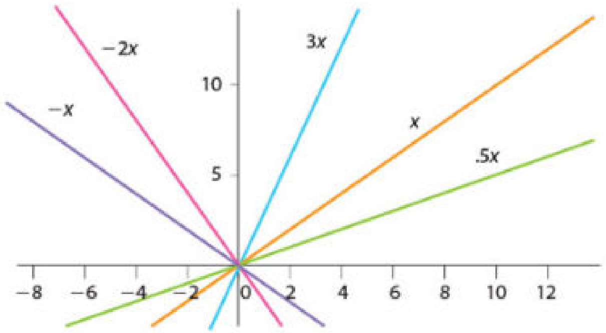
g) ¿Significa lo mismo rapidez de crecimiento de la ordenada y pendiente?

____



LOS MÉTODOS

A continuación tenemos las gráficas de las rectas $y = x$, $y = 0.5x$, $y = 3x$, $y = -x$, $y = -2x$.



A partir de la tabla de valores que se da a continuación, podemos obtener la pendiente de cada recta de la siguiente manera.

x		$y = x$		$y = 0.5x$		$y = 3x$		$y = -x$		$y = -2x$	
−3		−3		−1.5		−9		3		6	
−2		−2		−1		−6		2		4	
−1		−1		−0.5		−3		1		2	
0		0		0		0		0		0	
1		1		0.5		3		−1		−2	
2		2		1		6		−2		−4	
3		3		1.5		9		−3		−6	

Para el caso de la recta $y = 0.5\,x$…

a) Tomemos dos valores de x de manera arbitraria, por ejemplo $x = -2$ y su correspondiente valor para $y = -1$

$$\frac{1-(-1)}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Tomemos cualesquier otros valores $x = 0$ y su respectivo valor para $y = 0$

$$\frac{-1.5-0}{-3-0} = \frac{-1.5}{-3} = \frac{1}{2}$$

c) ¿Qué es lo que se está haciendo al realizar los cocientes que se plantean? ______

____

d) Calculen los cocientes para las restantes funciones, como lo hicieron con anterioridad.

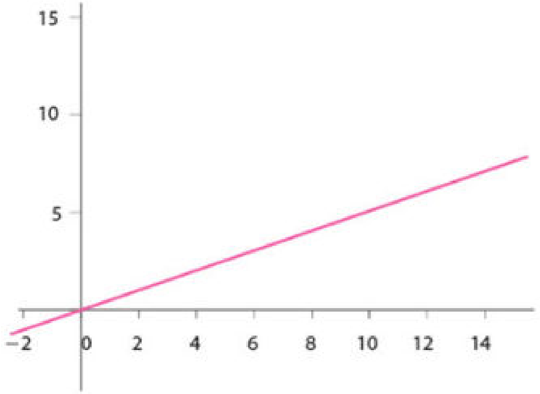
e) Verifiquen que la siguiente expresión algebraica proporciona el valor de la pendiente de la recta.

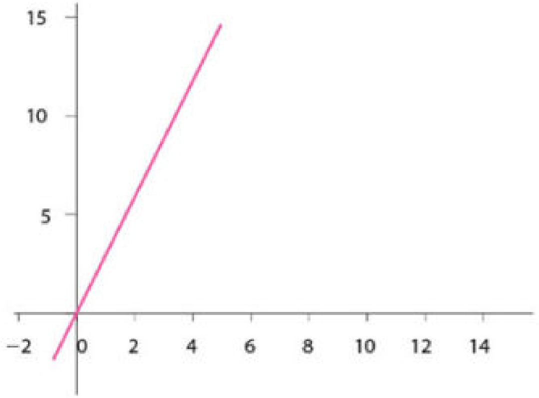
$$m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$$

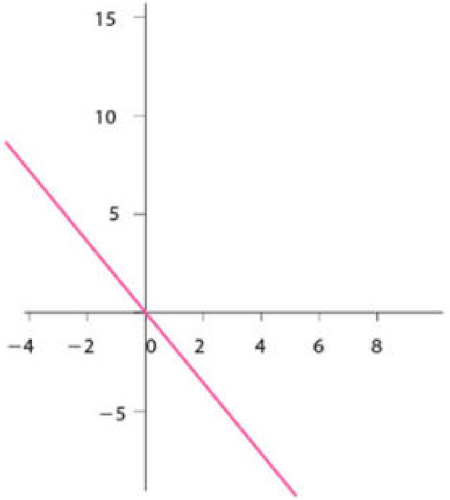
El orden en que se colocan las coordenadas es importante; es decir, si colocan primero y_1 en el numerador, deberásn colocar primero x_1 en el denominador. Sin embargo, se puede cambiar el orden.

¿Es cierta la igualdad $(y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$? ________________
Verifíquenla con base en los valores dados en la tabla.

Procediendo como en la actividad anterior, establezcan las pendientes de las rectas que se dan a continuación.





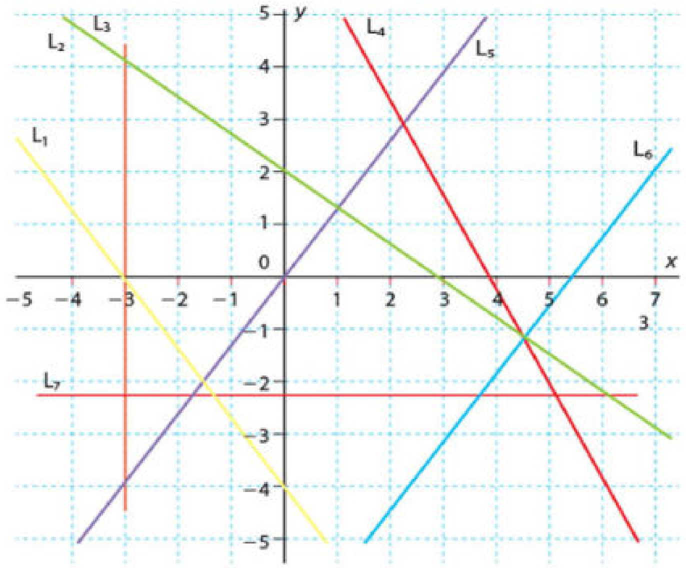


¿Podemos concluir que si el ángulo de inclinación entre la recta y el lado derecho del eje de las abscisas es obtuso, tendremos que la pendiente es negativa, pero si el ángulo de inclinación entre la recta y el lado derecho del eje de las abscisas es agudo, la pendiente es positiva?

PARA HACER

1. Tenemos en el plano las rectas L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7. Sean m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, las pendientes respectivas. Lleven a cabo lo que se pide.

   a) Por simple inspección, indica para cada recta si su pendiente es positiva o negativa. Analicen cada caso con uno o dos de sus compañeros.



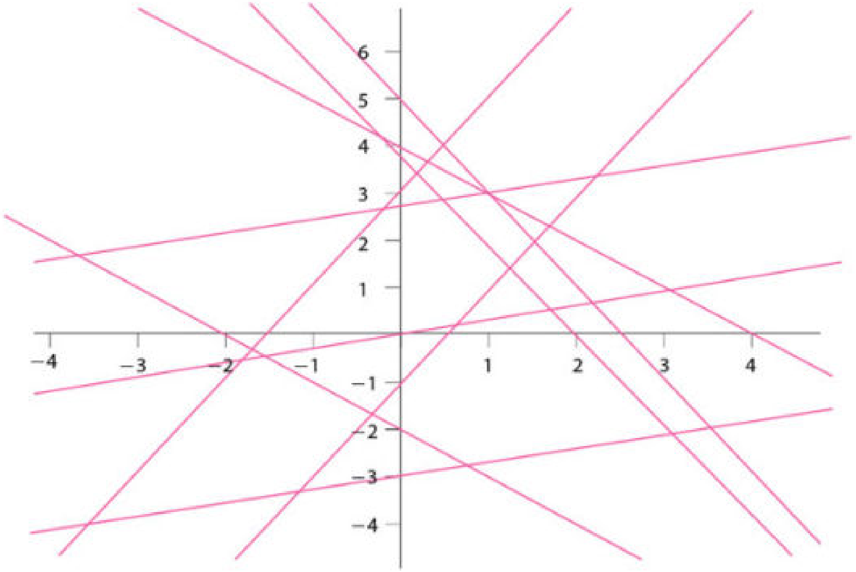
Pendiente	Valor y signo de la pendiente
m_1	
m_2	
m_3	
m_4	
m_5	
m_6	
m_7	

   b) Como las pendientes son números, ordénenlas comenzando con la de mayor valor. Justifiquen el orden que establezcan. ________________

La pendiente más grande es $m_?$	$m_?$	$m_?$	$m_?$	$m_?$	$m_?$	La pendiente más pequeña es $m_?$

2. En la siguiente figura se han trazados rectas en el plano.

Remarquen con un mismo color los grupos de rectas que tengan la misma pendiente, justifiquen su respuesta.



3. En el plano cartesiano de la página siguiente:

a) Tracen las rectas que se indican a continuación.

i. $y = -x - 1$

ii. $y = 3x + 3$

iii. $y = -1.5x + 2$

vi. $y = 0.2x + 1$

v. $y = -0.1x - 6$

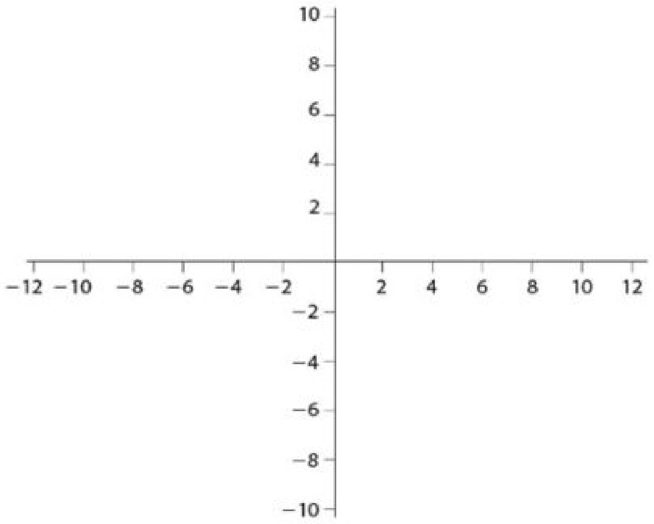
vi. $y = -2x + 5$

vii. $y = x + 3$

viii. $y = 0.5x + 4$

b) Para cada recta trazada, escriban en su cuaderno cuál fue el criterio que utilizaron para trazarla.

d) Comparen sus resultados con sus compañeros y consulten a su profesor



En esta lección aprendieron el concepto de pendiente de una recta, el cual constituye una de las herramientas más importantes de las matemáticas debido a que sirve para caracterizar a una recta en el plano, pues representa el valor numérico asociado a la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas. Estos elementos constituyen una herramienta primordial en la modelación del comportamiento lineal. Usa estos conocimientos para abordar el siguiente reto.

En la Actividad 2 de la sección "Para Hacer", encontraron grupos de rectas que tenían la misma pendiente, ¿cómo les llaman a estas rectas? De estos conjuntos, toman un par (con la misma pendiente). Si quisieran que las rectas fueran perpendiculares, ¿cómo tendrían que ser sus pendientes? Analicen la situación anterior con sus compañeros y su profesor y establezcan conjeturas. Pueden auxiliarse con algún software para facilitar la búsqueda de dichos valores.

LECCIÓN 4.4

En esta lección analizarás las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

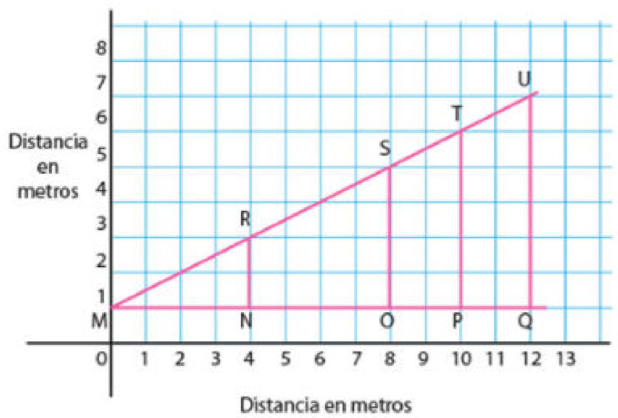
PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección, con base en lo que han aprendido sobre razón de proporción entre los lados de un triángulo, así como sobre triángulos rectángulos. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. Cálculo de la medida de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo (Primera parte)

A José, se le pidió diseñar una rampa para que los carros de volteo, que llevan y recogen material de una construcción a un sitio elevado, puedan subir y bajar de ese lugar sin contratiempos. Por las condiciones del terreno, el diseño de la rampa tiene forma de triángulo rectángulo con tres muros verticales intermedios de soporte, como se muestra en la figura. Los tres soportes y la altura de la rampa permiten que se formen los triángulos rectángulos *ΔRMN*, *ΔSMO*, *ΔTMP* y *ΔUMQ*.

Dibujo de la rampa



José mostró el diseño a los albañiles que trabajarán en la construcción de la rampa; ellos revisaron detalladamente el dibujo y observaron que no estaba indicada la medida del ángulo de elevación de la rampa. Le dijeron al ingeniero que les ayudara a determinar esos datos. En equipo, ayuden a los albañiles a determinar la medida del ángulo, consideren los datos del dibujo y tomen en cuenta las siguientes preguntas. Argumenten sus respuestas.

a) ¿Cuánto miden los catetos opuestos y los adyacentes de los triángulos rectángulos *ΔRMN*, *ΔSMO*, *ΔTMP* y *ΔUMQ*? ______________________

GLOSARIO

Ángulo de elevación: dada una línea horizontal de referencia y un objeto que se encuentra por encima de ésta, el ángulo de elevación es el que se forma por dicha horizontal y una línea visual hacia el objeto considerado.

b) ¿Cuánto mide su hipotenusa? ______________________

c) ¿Cuál es la razón de proporción entre el cateto opuesto y la hipotenusa de cada triángulo? ______________________

d) ¿Cuál es la razón de proporción entre el cateto adyacente y la hipotenusa de cada triángulo? ______________________

Utilicen la tabla siguiente para registrar sus datos.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	Razón: $\frac{\text{C. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	Razón: $\frac{\text{C. Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
ΔRMN					
ΔSMO					
ΔTMP					
ΔUMQ					

Comparen sus conclusiones con el resto de los equipos y valídenlos con su profesor. ¿Cuál es la medida de la rampa? __________ ¿Obtuvieron los mismos resultados? __________ ¿Pudieron determinar la medida del ángulo agudo M (ángulo de inclinación)? __________ ¿Por qué? ______________________

Actividad 2. Cálculo de la medida de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo (Segunda parte)

En la Actividad 1 obtuvieron el cociente del cateto opuesto sobre la hipotenusa, al que se le llama *seno* (sen), también obtuvieron el cociente del cateto adyacente sobre la hipotenusa, al que se le conoce como *coseno* (cos). Con base en ello, analicen y expliquen lo siguiente:

a) ¿Cómo es el resultado de la razón seno en los cuatro triángulos? __________

b) ¿Y el de la razón coseno? ______________________

c) ¿A qué creen que se deba esto? ______________________

Otra razón trigonométrica es la tangente, que se obtiene del cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Obtengan la tangente del ΔSMO, ΔTMP y ΔUMQ. Con base en ello, analicen y expliquen:

d) ¿Cómo es el resultado de la razón tangente en los cuatro triángulos? ¿A qué creen que se deba esto? ______________________

TIC

Pueden consultar una calculadora científica en línea: http://web2.0calc.es/

Para determinar la medida del ángulo M deben obtener, con una calculadora científica, el arcoseno (arc sen), arcocoseno (arc cos) y el arcotangente (arc tan) de los cocientes obtenidos, consideren hasta los diezmilésimos en los cálculos y resultados. Registren los resultados en la siguiente tabla.

Triángulo	Medida del ángulo M		
	arc sen	arc cos	arc tan
ΔRMN			
ΔSMO			
ΔTMP			
ΔUMQ			

TIC

Para obtener la medida de un ángulo, deben determinar con la calculadora el arcocoseno (arc cos), el arcoseno (arc sen): y arcotangente (arc tan) de los cocientes que obtuvieron. Si se obtiene a partir de la razón seno, es como sigue:

$\text{arc sen} = \frac{2}{4.47} = 26.5787$

En la calculadora, se procede de la siguiente manera:

Primero pulsar $\boxed{\text{INV}}$

Enseguida pulsar $\boxed{\text{Shift}}$

y luego escribir $\left(\frac{2}{4.47}\right) =$

El resultado es 26.5787° (grados).

Nota: en algunas calculadoras científicas, la tecla $\boxed{\text{INV}}$ aparece como $\boxed{\text{2nd}}$ o como $\boxed{\text{Shift}}$.
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

Enseguida, expliquen por qué los resultados coinciden con la medida del ángulo M.

____

Ahora obtengan la medida de los ángulos ∡*MRN*, ∡*MSO*, ∡*MTP* y ∡*MUQ*.

e) ¿Cuáles son los catetos opuestos de los triángulos rectángulos Δ*MRN*, Δ*MSO*, Δ*MTP* y Δ*MUQ*? ______________________

f) ¿Cuánto miden? ______________________

g) ¿Cuáles son los adyacentes? ¿Cuánto miden? ______________________

Elaboren una tabla y registren los datos.

h) ¿Cómo son entre sí las medidas de estos ángulos? ______________________

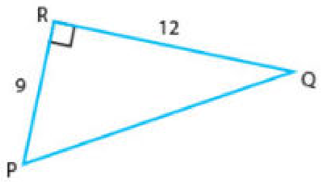
i) ¿Por qué sucede esto? ______________________

Comparen sus resultados con el resto de los equipos y valídenlos con su profesor. ¿Obtuvieron los mismos resultados? ______________________

Escriban en su cuaderno un reporte en el que expliquen cuánto mide el ángulo de inclinación y cómo lo determinaron.

Actividad 3. Relaciones entre lados y ángulos agudos de un triángulo rectángulo

Con base en lo aprendido hasta ahora, determinen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para el siguiente triángulo rectángulo:



sen ∡P = ______	sen ∡Q = ______
cos ∡P = ______	cos ∡Q = ______
tan ∡P = ______	tan ∡Q = ______

Enseguida, analicen y expliquen lo siguiente:

a) ¿Cuánto mide el ángulo agudo P? ______________________

b) ¿Cuánto mide el ángulo agudo Q? ______________________

c) ¿Cuánto suman los ángulos P y Q? ______________________

Elaboren un reporte en el que expliquen:

d) En qué basaron sus cálculos para determinar las razones trigonométricas del Δ*PQR*.

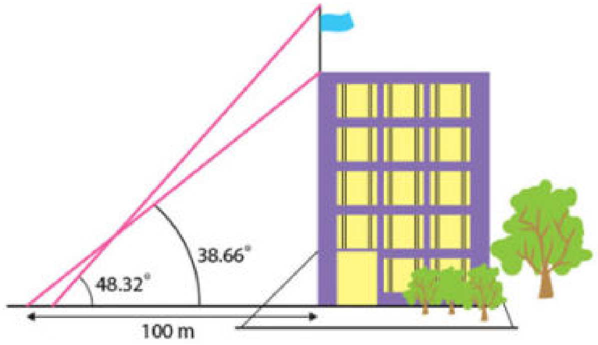
e) Cómo determinan la medida de los ángulos del Δ*PQR*.

f) La relación que existe entre el seno de un ángulo y el coseno de su complemento.

g) Cómo calculan uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo, si se conoce la medida de dos de sus lados.

Actividad 4. Determinación de distancias

Desde una distancia de 100 m frente a una biblioteca pública, el ángulo de elevación de la base del asta bandera hasta su punto más alto mide 48.32° y al punto más alto del edificio, 38.66°, tal como se muestra en la figura. La base del asta bandera se encuentra montada en la parte más alta de la biblioteca. Con estos datos, analicen y expliquen lo siguiente:



a) ¿Cuánto mide la altura del edificio? ¿Cuánto, la del astabandera?

____

b) ¿Qué distancia hay del punto más alto de la biblioteca hasta el vértice del ángulo de elevación que se forma con la recta horizontal de 100 m? ____________
¿Qué distancia hay del punto más alto del astabandera hasta el vértice del ángulo de elevación que se forma con la recta horizontal? ____________

A partir de los anteriores procedimientos, describan en qué basaron sus cálculos para determinar las distancias que se piden en el problema.

Comparen sus conclusiones y procedimientos con los de otro equipo. ¿Obtuvieron los mismos resultados? __________ ¿Usaron los mismos procedimientos? __________ Argumenten su respuesta. ______________________

Una síntesis...

Mediante las actividades de esta lección, aprendieron a obtener tres razones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente.

Las razones trigonométricas son relaciones que se establecen entre dos lados de un triángulo rectángulo, y su valor depende únicamente del valor del ángulo agudo, no del triángulo rectángulo particular.

¿En qué se basan los cálculos cuando se pide encontrar uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si se conoce la medida de dos de sus lados?

____

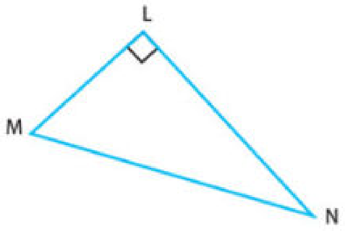
____

____

Analicen la frase siguiente y expliquen por qué es verdadera. Proporcionen dos ejemplos:

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre son complementarios

Determinen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para el triángulo rectángulo ΔLMN.



sen ∡M = ____	sen ∡N = ____
cos ∡M = ____	cos ∡N = ____
tan ∡M = ____	tan ∡N = ____

Escriban la definición de cada una de estas razones trigonométricas.

Seno: ____

Coseno: ____

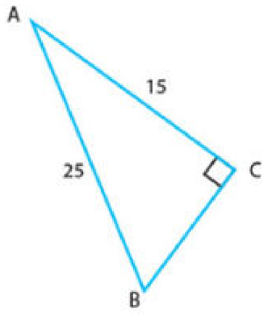
Tangente: ____

LOS MÉTODOS

Con base en lo aprendido en esta lección, determinen las medidas faltantes en los siguientes triángulos rectángulos. En cada caso, describan el método que usaron para realizar sus cálculos.

Caso 1: Determinación de la medida del ángulo agudo en un triángulo rectángulo

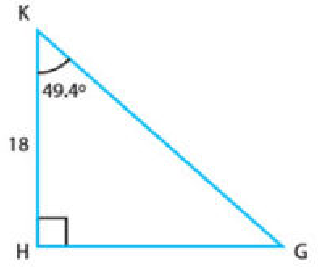
En el triángulo rectángulo ABC, ∡ACB = 90°, ¿cuánto mide el ángulo agudo ∡ABC?



Método: ____

Caso 2: Cálculo de la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo

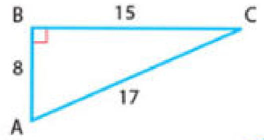
En el triángulo rectángulo GHK, ∡KHG = 90°, ∡HKG = 49.4°, $\overline{KH}$ = 18 cm, ¿cuánto mide $\overline{KG}$?

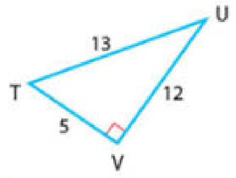


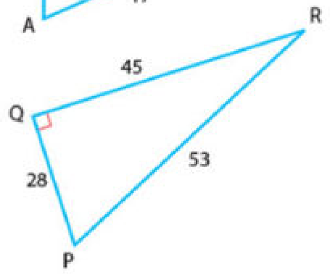
Método: ____

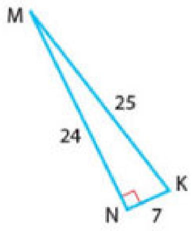
PARA HACER

1. Con su juego de geometría construyan en su cuaderno un triángulo rectángulo al que nombrará ΔRST, donde ∡RST = 90° y ∡STR = 30°. Con base en ello, analicen y expliquen lo siguiente:
   a) ¿Cuánto mide el ∡SRT? ____
   b) Determinen las razones trigonométricas de los ángulos agudos ∡SRT y ∡STR. ____
   c) ¿Cuánto mide el seno ∡SRT? ____
   d) ¿Cuánto mide el coseno de ∡STR? ____
   e) ¿Por qué sucede esto? ____
   f) Si el seno de un ángulo de 30° es igual a 0.5, ¿a qué es igual el coseno de un ángulo de 60°? ____
   g) ¿A qué es igual el producto de la tangente de un ángulo de 30° por la tangente de un ángulo de 60°? ____
2. Determinen el seno, coseno y tangente de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos siguientes.









3. Con base en los resultados que obtuvieron en la actividad previa, determinen la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos ΔPQR, ΔABC, ΔTVU y ΔKNM. Registren los datos en la siguiente tabla.

ΔABC		ΔTVU		ΔPQR		ΔKNM	
∡BAC	∡BCA	∡VTU	∡TUV	∡QPR	∡QRP	∡NKM	∡KMN

4. Una antena de 70 m de altura está sujeta por cuatro cables a una altura de 4/6 de la misma. Los cables están sujetos al suelo a una distancia de 35 m del pie de la antena.
   - *a*) ¿Cuánto mide cada cable? ______________________________
   - *b*) ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de cada cable?

     ____

En esta lección analizaron las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo. Con base en ello, determinaron las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, así como la medida de los ángulos agudos, cuando se conocen las medidas de dos lados. Investiguen en un libro especializado qué otro tipo de razones trigonométricas pueden establecerse en este tipo de triángulos y en qué consisten.

LECCIÓN 4.5

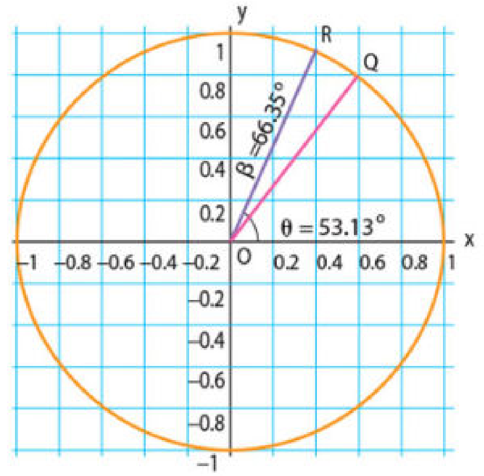
En esta lección explicitarás y harás uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección, con base en lo que han aprendido sobre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. Razones trigonométricas en la circunferencia de radio 1 (Primera parte)

Los estudiantes de tercer grado de secundaria construyeron con el software Geogebra una circunferencia de radio 1, con centro en el origen del plano cartesiano. Enseguida, trazaron dos ángulos, el $\measuredangle\theta = 53.13^\circ$ y el $\measuredangle\beta = 66.35^\circ$.



Con base en la gráfica adjunta (pueden trazarla con ayuda de su profesor y con el programa Geogebra), respondan lo siguiente:

- *a*) Determinen dos perpendiculares hacia el eje *x*, una desde el punto *Q*, que está sobre la circunferencia, y otra desde el punto *R*.
- *b*) Nombren como *D* a la intersección del eje *x* con la recta perpendicular trazada por *Q*, y como *E*, a la intersección de ese mismo eje con la perpendicular trazada por *R*.

A partir de los trazos realizados sobre la gráfica, analicen y expliquen:

- c) ¿Por qué ΔDOQ y ΔEOR son triángulos rectángulos? ____________________

d) ¿Cuál es el valor de la hipotenusa en el ΔDOQ y en el ΔEOR? __________ ¿Por qué sucede esto? ____

e) ¿Cuál es el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos agudos β y θ de los triángulos que formaron? __________ Con base en la gráfica completen la tabla siguiente.

ΔDOQ	ΔEOR
$\text{Sen}\ \theta = \frac{\overline{QD}}{\overline{OQ}} = \frac{\square}{1}$	$\text{Sen}\ \beta = \frac{\overline{RE}}{\overline{OR}} = \frac{\square}{1}$
$\text{Cos}\ \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OQ}} = \frac{\square}{1}$	$\text{Cos}\ \beta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OR}} = \frac{\square}{1}$
$\text{Tan}\ \theta = \frac{\overline{QD}}{\overline{OD}} = \frac{\square}{\square}$	$\text{Tan}\ \beta = \frac{\overline{RE}}{\overline{OE}} = \frac{\square}{\square}$

A partir de los datos de la tabla, analicen cómo varían los valores de las razones trigonométricas seno y coseno en función de la medida del ángulo de rotación asociado. ¿Cómo es el valor de seno θ respecto de seno β? __________ Analicen de la misma manera las razones coseno y tangente. ______________________________

Analicen la variación de estas razones trigonométricas en ángulos agudos de otras medidas, por ejemplo de 25°, 40° y 80°. Con base en ello, expliquen qué sucede con el valor de estas razones trigonométricas cuando crece o disminuye el ángulo agudo asociado y por qué. ____

Actividad 2. Razones trigonométricas en la circunferencia de radio 1 (Segunda parte)

Los estudiantes de tercer grado continúan profundizando su estudio sobre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Se interesaron por saber cómo se relacionan estas razones con los ejes coordenados del plano cartesiano. Como dato inicial, consideraron las coordenadas de los vértices R y Q, del ΔDOQ y el ΔEOR respectivamente. En equipo, revisaron los datos en Geogebra y se percataron de que la coordenada de R es (0.4, 0.92). Con base en ello, hicieron su análisis.

Raúl y su equipo reconocieron que había una relación entre el valor de y (**ordenada**) con el que toma seno θ, así como entre el valor de x (**abscisa**) con el coseno θ. Esta relación la reconocieron también en seno β y coseno β.

GLOSARIO

Ordenada: distancia vertical desde un punto en un sistema de coordenadas cartesianas, hasta el eje horizontal, o eje *x*.

Abscisa: distancia horizontal desde un punto en un sistema de coordenadas cartesianas, hasta el eje vertical, o eje *y*.

Formen un equipo e identifiquen la relación matemática que encontró Raúl. Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el valor de y en la coordenada de R? __________ ¿Cuál es el valor de la razón seno θ? ______________________

b) ¿Cuál es el valor de x en la coordenada de R? __________ ¿Cuál es el valor de la razón coseno θ? ______________________

c) ¿Qué relación hay entre la ordenada y el valor de seno θ? __________ ¿Y entre la abscisa y el coseno θ? __________ Usen la simbología matemática adecuada para representar ambas relaciones y expliquen por qué sucede esto. ____________
____

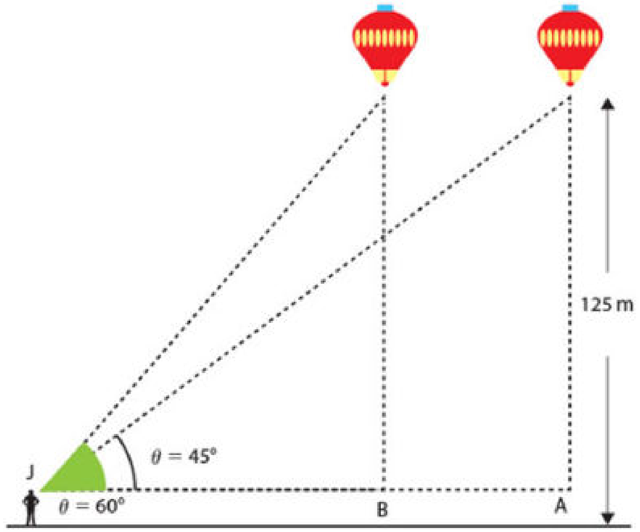
Hagan un análisis como el anterior para que expliquen qué relación hay entre la ordenada del punto R con la razón seno β, así como entre la abscisa de ese mismo punto, con el coseno β.

Con base en ello, determinen el valor de la tangente de los ángulos θ y β, en términos de la ordenada y de la abscisa en los puntos D y E respectivamente. ¿Qué relación matemática puede establecerse entre las razones seno y coseno con la razón trigonométrica tangente? Escríbanla. ______________________________

Compartan sus resultados con el resto de los equipos y valídenlos con su profesor. ¿Obtuvieron las mismas conclusiones? ¿Por qué?

Actividad 3. Distancia recorrida por un globo

Los estudiantes de tercero de secundaria aplican lo que aprendieron sobre las razones trigonométricas para determinar la distancia recorrida por un globo aerostático en determinado momento.



Saben que a una altura de 1.65 m José, uno de sus compañeros, observa cómo el viento mueve en dirección horizontal un globo aerostático que se encuentra a una altura de 125 m de la tierra. Los estudiantes observaron que el ángulo de elevación del globo, desde la altura de los ojos de José, mide 60° en un momento A, y que en un momento B la medida de este ángulo se reduce a 45°, debido al movimiento producido por el viento.

En sus notas, hicieron un dibujo para representar la altura del globo desde la tierra, la distancia que recorrió de un punto a otro, y la medida del ángulo de inclinación asociada a los dos momentos en que se tomaron los datos desde la altura que José mira su recorrido. A partir de ello, observaron que los dos triángulos que representaron son triángulos rectángulos.

Con base en los datos del problema, determinen la distancia que recorrió el globo del momento A al B. Consideren las siguientes preguntas:

a) ¿Qué distancia hay del punto A al globo? __________ ¿Por qué es importante determinar este dato? ______________________________

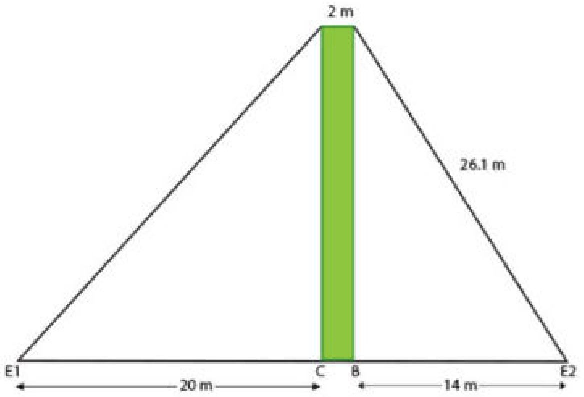
b) ¿Qué distancia hay del punto J (altura desde la que observa José) hasta el punto A? __________ ¿Qué distancia hay del punto J hasta el B? ______________________

c) ¿Qué distancia recorrió el globo del punto A al B? ______________________

Elaboren un reporte en el que describan las relaciones matemáticas y los procedimientos en que se basaron para resolver el problema. Compartan sus conclusiones con uno o más equipos y valídenlas con su profesor. ¿Se apoyaron en las mismas relaciones matemáticas? _________ ¿Desarrollaron los mismos procedimientos? _________ ¿Obtuvieron las mismas conclusiones? Argumenten sus respuestas.

Actividad 4. Ángulo de inclinación y altura de un poste

En la colonia donde vive José instalaron un poste que se encuentra sujeto por dos cables de acero anclados a nivel de la tierra por estacas. En la parte más alta los cables están atados a una polea ubicada en la base superior de la antena, como se muestra en la figura.



José sabe que el cable más corto mide 26.1 m y que la estaca que lo ancla se encuentra a 14 m de la base del poste. También sabe que el poste mide 2 m de ancho y que de la base a la estaca que ancla al cable más largo hay 20 m de distancia. Con base en estos datos, José quiere determinar:

a) La altura del poste.
b) La longitud del cable más largo.
c) El ángulo de inclinación que se forma con cada estaca.

Ayuden a José a determinar los datos. Utilicen una calculadora para determinar el ángulo de inclinación.

Comparen los procedimientos que llevaron a cabo, así como sus conclusiones con otros equipos. ¿Usaron los mismos procedimientos? _________ ¿Arribaron a las mismas conclusiones? ¿Por qué sucede esto? _________

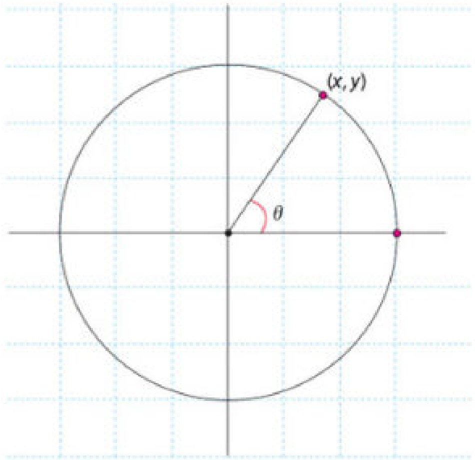
Una síntesis...

En el estudio de las razones (o funciones) trigonométricas seno, coseno y tangente aprendieron que éstas se encuentran relacionadas con la amplitud de un ángulo agudo, de un triángulo rectángulo y las longitudes de dos de sus lados. Una vez que se conocen dos de estos datos, es posible determinar el tercero. Reconocieron, además, que la variación del valor de las razones trigonométricas no depende del triángulo rectángulo que se elija. Expliquen de qué depende y argumenten su respuesta.

Al estudiar las funciones trigonométricas en términos de un punto (x, y) sobre una circunferencia de radio 1, con un ángulo de rotación dado, observaron que la hipotenusa de los triángulos rectángulos que construyeron siempre mantiene la misma medida. Expliquen ahora, ¿qué pasa con la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo construido sobre una circunferencia con un radio de dos, tres, cuatro o más unidades? ¿Por qué sucede esto?

Con base en lo que aprendieron, definan las razones seno, coseno y tangente, en términos de la ordenada y la abscisa de un punto (x, y) en un sistema de coordenadas cartesianas. Consideren para ello a θ como ángulo de rotación, tengan en cuenta la figura adjunta.

Sen θ =   Cos θ =   Tan θ =



Expliquen por qué el valor de una función trigonométrica está relacionado con el de las coordenadas de un punto $P(x, y)$ de la circunferencia.

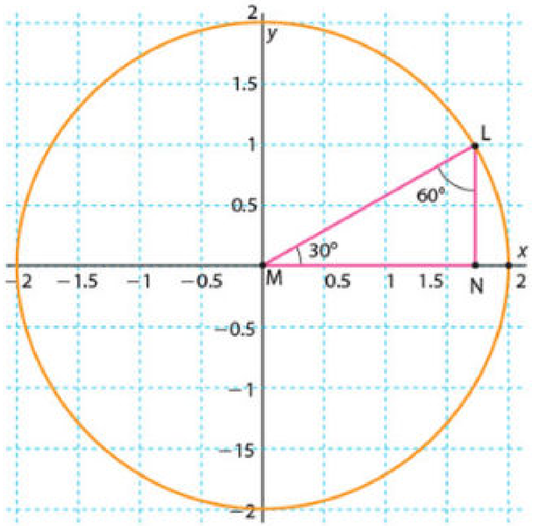
Determinen las razones trigonométricas de los ángulos agudos de 30° y 60° de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2. Escriban en su cuaderno los procedimientos que realicen y registren sus resultados en la tabla adjunta.

Razones trigonométricas de 30°
Sen 30° =
Cos 30° =
Tan 30° =

Razones trigonométricas de 60°
Sen 60° =
Cos 60° =
Tan 60° =

TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver las actividades de la 40 a la 42 del Bloque IV, páginas 96-102 de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (consultada en octubre de 2013)
Comparte y discute con tus compañeros las respuestas.



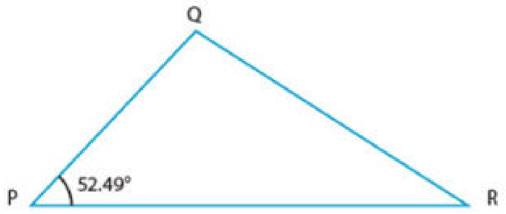
Analicen los datos que obtuvieron, ¿qué valores de las razones trigonométricas de los agudos de 30° son equivalentes a los ángulos de 60°? Establezcan la relación correspondiente entre las razones trigonométricas asociadas.

LOS MÉTODOS

Con base en lo que aprendieron en esta lección, en equipo, resuelvan los problemas planteados en los casos siguientes. Describan el método que utilicen para cada caso.

Caso 1: Dados un lado de un triángulo rectángulo y un ángulo agudo, determinen la medida de otro de sus lados.

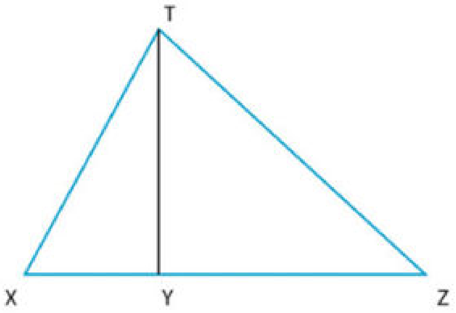
En el ΔPQR, ∡PQR = 90°, ∡QRP = 52.49°, $\overline{PR}$ = 16.5 dm y $\overline{QR}$ = 130 cm, ¿cuánto mide $\overline{PQ}$?



Método:

Caso 2: Dados dos lados de un triángulo rectángulo, calculen la medida de los ángulos agudos.

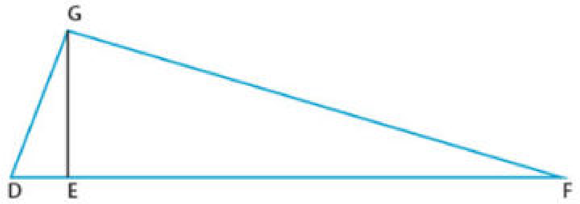
En el ΔXZT, se sabe que $\overline{YT}$ es perpendicular a $\overline{XZ}$, $\overline{YT}$ = 12 cm y $\overline{XY}$ = 6 cm ¿cuánto mide ∡TXY?, ¿cuánto el ∡YTX? Si $\overline{YZ}$ = $\overline{XY}$, ¿cuánto miden los ángulos agudos del ΔYZT?



Método:

PARA HACER

1. El pie de una escalera de seis metros de longitud está ubicado a 2.5 m de la pared a la que está reclinada. Con base en estos datos, determinen:
   - *a)* ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de la escalera? ____________________
   - *b)* ¿A qué altura del piso se encuentra el extremo superior de la escalera?
2. Una antena de 60 m de altura está sujeta por cuatro cables de acero que se encuentran anclados a nivel de la tierra por estacas, mientras que la parte más alta de estos cables está sujeta a una polea ubicada en la base superior de la antena. Si cada estaca se encuentra a 60 m de la base de la antena, calculen:
   - *a)* ¿Cuánto mide, el ángulo de inclinación que forman los cables?
   - *b)* ¿Cuánto mide en metros, cada cable de una punta a la otra?
3. En la tabla siguiente aparecen registrados datos con las medidas de tres triángulos rectángulos diferentes. Completen los datos faltantes, si se sabe que en el triángulo DFG, ∡FEG = 90° y $\overline{EG}$ es perpendicular a $\overline{DF}$.



Casos	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\overline{DG}$	$\overline{FG}$	$\overline{EG}$	$\overline{DF}$
1	3.2				9.5 cm	
2		21.5 cm			10.7 cm	
3			4 cm			13.7 cm

4. Con base en los datos que completaron en la tabla de la situación previa, determinen la amplitud de los ángulos agudos de los triángulos registrados en la siguiente tabla.

Triángulos	Amplitud de los ángulos	
ΔDEG	∡GDE =	∡EGD =
ΔEFG	∡EGF =	∡EFG =
ΔDFG	∡GDF =	∡GFD =

a) ¿Qué triángulos comparten un ángulo agudo? ___________ ¿Cómo son entre sí estos triángulos? ____

b) ¿Qué relaciones matemáticas usaron para determinar la amplitud de los ángulos?
____

c) ¿Cuánto mide el ∡DFG y el ∡FDG? ___________ ¿Cuánto el ∡EGF ___________

En esta lección, el estudio de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente se hizo sobre una circunferencia de radio uno y el ángulo de rotación se restringió de 0° a 90°, es decir, a un ángulo ubicado en el primer cuadrante del sistema coordenado cartesiano. En equipo, analicen qué valor toman estas razones trigonométricas cuando el ángulo mide 0° y 90°. Investiguen, en un libro especializado, cómo varía el valor de seno, coseno y tangente en el segundo cuadrante, para un ángulo agudo de la misma magnitud; por ejemplo, para ángulos cuya medida sean: 30°, 45° y 60°, a los que también se les conoce como ángulos notables, ¿por qué se les llama así?

LECCIÓN 4.6

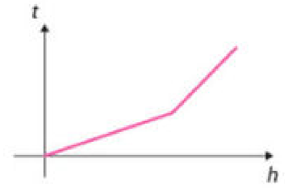
En esta lección calcularás y analizarás la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Asimismo, identificarás la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

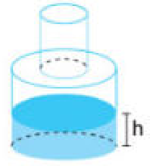
PARA APRENDER

Actividad 1. Llenado de recipientes… otra vez

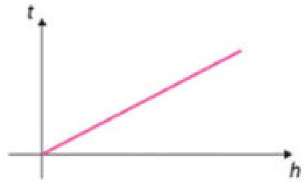
En la Lección 3.6 trabajaron con el llenado de recipientes. Vuelvan a ellos y pongan atención en los cambios que se producen sobre las rectas. Reúnanse en grupos de tres compañeros para trabajar esta actividad.

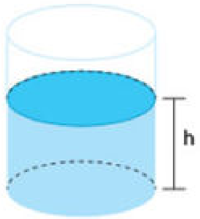
a) Dada la gráfica y la imagen siguiente, ¿cómo explicarían el cambio de inclinación de la recta teniendo en cuenta el dibujo del recipiente? Justifiquen ampliamente su respuesta. ____





b) ¿Por qué, en este caso, la recta no sufre un cambio en su inclinación? Justifiquen sus respuestas. ____





c) ¿Cómo cambia la pendiente de la recta en la relación que hay entre la variación de la altura y la variación del tiempo? ____

Actividad 2. Hablemos de velocidad

Es común, para quienes se transportan en automóvil, que digan: "iba a una velocidad de 100 km/h", pero… ¿qué quieren decir con eso? Comenten con sus compañeros lo que significa esa frase y, en particular, ¿qué define a la velocidad? Compartan sus respuestas en grupo y hagan entre todos una caracterización.

Luego, observen las siguientes tablas de valores de dos vehículos que salieron del mismo lugar, a la misma hora y llegaron al mismo lugar, a la misma hora:

Automóvil 1:

Distancia (km)	0	80	160	200	240	280	320	400
Tiempo (h)	0	1	2	2.5	3	3.5	4	5

Automóvil 2:

Distancia (km)	0	100	200	250	300	325	350	400
Tiempo (h)	0	1	2	2.5	3	3.5	4	5

Nota: cuando dice, por ejemplo, "2.5 horas" se refiere a dos horas y media.

a) ¿A qué velocidad se trasladaron los automóviles? ____________________

b) De la segunda hora a la tercera, ¿cuál de los dos automóviles avanza más? Argumenten su respuesta. ____________________ ¿Qué distancia se trasladó el automóvil 1 en ese tiempo? __________ ¿Cuánto recorrió el automóvil 2? __________ Entonces, ¿cuáles fueron sus velocidades en ese trayecto? __________ Comenten con sus compañeros las estrategias que usaron. Recomendación: tracen la gráfica tiempo-distancia de ambos automóviles.

c) ¿Coincide la respuesta dada en el inciso *a*) con la respuesta dada en el *b*)? __________ ¿Por qué? ____________________

Si no coinciden, vuelvan a pensar las preguntas. ¿Qué nuevos elementos consideraron ahora? ____________________

d) ¿La velocidad a la que se trasladaron los automóviles fue constante? Justifiquen ampliamente su respuesta. ____________________

____

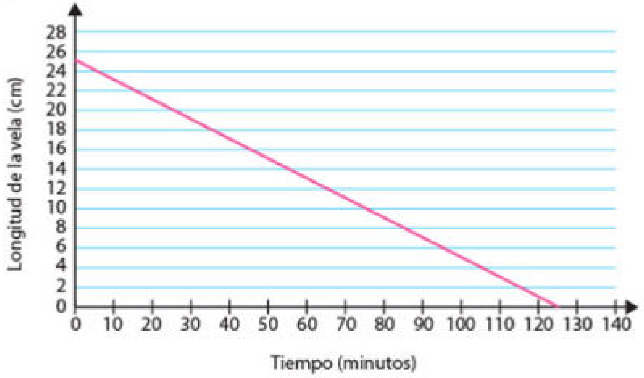
Comenten con sus compañeros las distintas estrategias que usaron para contestar.

Formen grupos de tres compañeros y construyan una expresión algebraica que les permita calcular la velocidad como razón de cambio entre desplazamiento y el tiempo. Compartan con sus compañeros las distintas expresiones y explíquenlas.

Actividad 3. La luz de la vela

Los arqueólogos afirman que desde hace más de 30 mil años, en la edad del hielo europea, se empleó un tipo de vela que consistía en verter aceite o grasa sobre una piedra ahuecada hasta el final. Se utilizaron como lámparas para hacer las magníficas pinturas rupestres que hay en España y Francia. Hoy, las velas están hechas con una mezcla de parafina, cera de abeja y un ácido graso sólido.

En la actualidad, podemos calcular el tiempo que durará encendida una vela. Por ejemplo, se encendió una vela y se midió su longitud, conforme transcurrió el tiempo, hasta que se agotó.



Reúnanse en grupos de tres compañeros y contesten las siguientes preguntas en su cuaderno:

a) ¿Cuánto mide la vela antes de encenderla? ¿Cuánto disminuye su longitud por cada 10 minutos? ¿Cuánto tiempo tarda en consumirse la vela?

b) ¿Cómo es la variación entre la cantidad de minutos transcurrida y la longitud de la vela? Comenten con sus compañeros y argumenten su respuesta.

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que expresa la relación mencionada en el inciso *b*)?

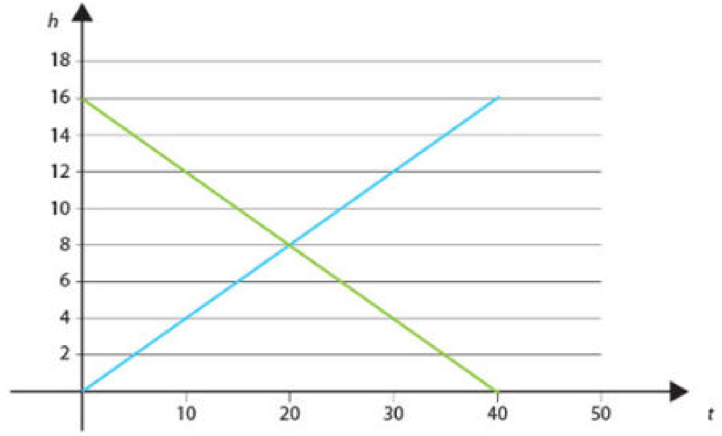
d) ¿Qué función cumple la razón de cambio en la expresión algebraica que enuncia este fenómeno?

e) Si sabemos que la *razón de cambio* es el cociente que cuantifica la variación de una cantidad con relación a otra, ¿cuál es la razón de cambio en este caso? ¿Cuáles son las cantidades involucradas? Comenten con sus compañeros las estrategias que utilizaron para responder esta pregunta.

Una síntesis…

En los fenómenos cuyo modelo matemático es una función lineal, la razón de cambio juega un papel fundamental, pues es el cociente que cuantifica la variación de una cantidad con relación a la otra. ¿Cuál es la razón de cambio en el caso de la vela? __________ ¿Cuáles son las cantidades involucradas? ____________________

Las funciones graficadas a continuación representan la altura respecto al tiempo de llenado o vaciado de un recipiente:



¿Qué función corresponde al llenado del recipiente? ____________________

¿Cuál al vaciado? ____________________

La razón de cambio en las *funciones lineales* es un sinónimo de la *pendiente* que, como aprendiste en la Lección 4.3, está asociada con la idea de inclinación.

Por ejemplo, la razón de cambio o pendiente de la función representada en color azul, si se consideran los puntos (0, 0) y (40, 16), es:

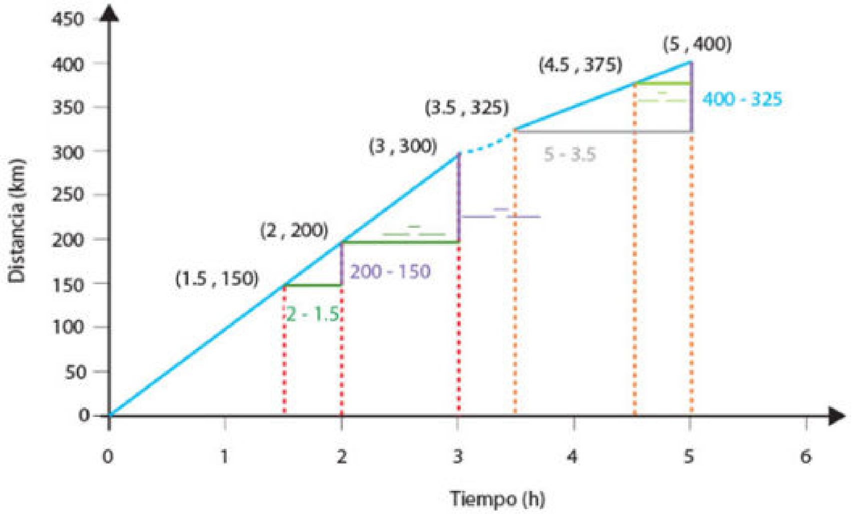
$$m = \frac{16-0}{40-0} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

¿Cuál es la razón de cambio de la función representada en color verde?

____

LOS MÉTODOS

En en el inciso *d*), de la Actividad 2, se preguntó si la velocidad a la que se desplazaban los automóviles era constante. Si consideramos al automóvil 2 y graficamos su función, indicando los valores que aparecen en la tabla, quedaría esbozado así:



Nota: se colocan puntos en la gráfica entre los valores 3 y 3.5, ya que no es posible que un vehículo cambie su velocidad abruptamente.

La gráfica muestra que hay dos pendientes o razones de cambio diferentes, que dan lugar a dos segmentos de rectas con distinta inclinación. Identifiquen estos segmentos. Como ocurre con el llenado de recipientes, las pendientes no son las mismas, entonces…

… cuando las pendientes de las rectas son distintas, ¿qué puede asegurarse respecto de las razones de cambio? ______________________________

El automóvil 2, desde el inicio hasta la tercera hora, se mueve con una razón de cambio y luego, de la tercera hora hasta la quinta hora, con otra. Recordando lo que contestaron para concluir la Actividad 2…

… ¿cómo se calcula la razón de cambio durante un determinado tiempo?

____

____

Para calcular la razón de cambio (m) si tenemos dos puntos conocidos de la recta, por ejemplo (2,200) y (3,300), entonces:

$$m = \frac{300-200}{3-2} = \frac{100}{1} = 100$$

O bien, si tenemos (4.5,375) y (5,400), tendríamos:

____

De manera general:

Si tenemos dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la razón de cambio o pendiente de la recta $y = mx + b$, se puede hallar de la siguiente manera:

$$m =$$

PARA HACER

1. En una tienda de materiales para construcción el precio de la tonelada de cemento ha experimentado el mismo incremento cada mes en el presente año. En enero el costo de una tonelada fue de $1 575, en marzo, de $1 625 y en junio, de $1 700.
   - *a*) ¿Cuál es la razón de cambio en el precio con relación al tiempo? ______________
   - *b*) Señalen con una X cuál de las siguientes expresiones sirve para calcular el costo de una tonelada de cemento en cualquier mes después de enero. Justifiquen su respuesta. ______________

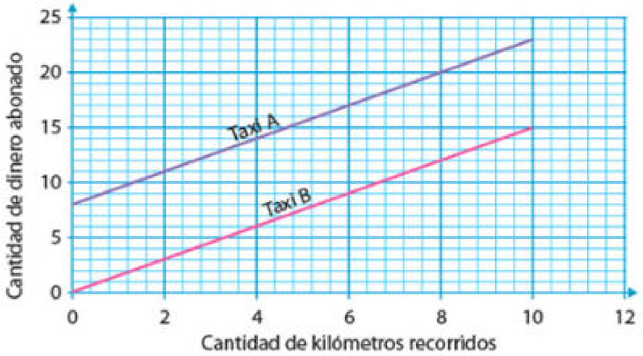
     $p = 25m - 1575$

     $p = m + 1575$

     $p = 25n + 1575$

     $p = m - 1575$

2. La gráfica muestra el costo de un viaje hecho en dos taxis distintos:



   - *a*) Para cada taxi, ¿cuál es el costo por cada kilómetro recorrido? ______________

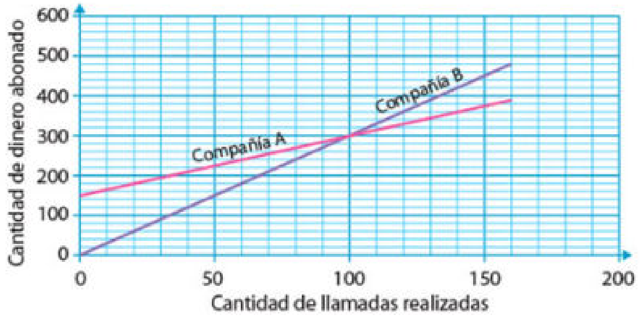
     ____
   - *b*) ¿Son diferentes los incrementos en el costo por kilómetro recorrido? Justifiquen su respuesta. ______________
   - *c*) ¿Cómo se representa en la gráfica el dinero abonado por kilómetro recorrido?

     ____
   - *d*) ¿Cuánto será el costo en cada taxi por un recorrido de 6 km? Retomando la respuesta del inciso *b*), ¿por qué el costo es distinto para cada taxi? Argumenten su respuesta. ______________

TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver la actividad 11 del Bloque I, páginas 22 y 23 de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (consultada en noviembre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

3. La gráfica muestra el costo del servicio telefónico de dos compañías:



a) ¿Cuál es el precio de una llamada en cada compañía? ______________ ¿Qué estrategias usaron para dar respuesta? ______________________________
____

b) ¿Por qué el costo por 100 llamadas telefónicas es el mismo en las dos compañías? ____

c) ¿Cuál es el costo de 50 a 100 llamadas en la compañía A? ______________

¿Y en la B? ____

d) ¿Cuál es la razón de cambio del precio respecto de la cantidad de llamadas de cada compañía? ______________________________

¿Qué compañía conviene más? Justifiquen su respuesta. ____________________
____

En años anteriores analizaron los efectos que tenía sobre la gráfica el cambio de parámetros de la función $y = mx + b$. En esta lección analizaron más a fondo las características que tiene dicha razón de cambio y su relación con la pendiente de la recta. Reúnanse con sus compañeros para analizar los fenómenos que se modelan con una función lineal y elaboren un resumen: ¿qué características tienen cada uno de sus parámetros? ¿Cómo se calcula la razón de cambio? ¿Qué expresa esta razón? ¿Cómo es la gráfica si la razón de cambio o pendiente es negativa? ¿Y si es positiva? Propongan un ejemplo para cada caso y coméntenlo en grupo.

LECCIÓN 4.7

En esta lección aprenderás a medir la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato respecto a la media (desviación media). Analizarás las diferencias entre la desviación media y el rango en cuanto a medidas de dispersión.

PARA APRENDER

Actividad 1. La distribución de ganancias[1]

Don Enrique tiene una tienda de abarrotes, asegura que por la manera en que la administra gana mucho más que la tienda de doña Queta.

Don Enrique y doña Queta se propusieron hacer un listado con las ganancias obtenidas por cada día de una semana. La lista quedó como sigue:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Tienda de don Enrique	$100	$120	$350	$370	$250
Tienda de doña Queta	$225	$240	$230	$250	$245

a) De acuerdo con los datos de la tabla, ¿tiene razón don Enrique? ______________

b) ¿Cuál es el valor que representa la ganancia promedio por día de la tienda de don Enrique? ______________, ¿y de la tienda de doña Queta? Justifiquen su respuesta.
____

c) Si se elige un día de la semana al azar, ¿la ganancia promedio de la tienda de don Enrique se aproxima a la ganancia de ese día?, ¿sí, no, en cuánto? ______________

d) En la tienda de don Enrique, ¿en qué día o días de la semana la ganancia se aproxima considerablemente al valor promedio de la ganancia? ______________, ¿qué días están muy alejados de la ganancia promedio? ______________________

e) Si se elige un día de la semana al azar, ¿la ganancia promedio de la tienda de doña Queta se aproxima a la ganancia de ese día? ______________ ¿En caso afirmativo, ¿en cuánto se aproxima? ______________________________

f) En la tienda de doña Queta, ¿en qué día o días de la semana la ganancia se aproxima considerablemente al valor promedio de la ganancia? ______________ ¿Qué días están muy alejados de la ganancia promedio? ______________________

g) ¿En cuál de estas dos tiendas el valor de la ganancia promedio es más representativo? Justifiquen su respuesta. ______________________________

Doña Queta asegura que esta situación sucede debido a que su rango de ganancias es muy pequeño y para demostrarlo realizó lo siguiente:

GLOSARIO

Rango: diferencia entre el valor máximo y mínimo de un grupo de datos aleatorios. Se suele simbolizar con la letra **R**.

---

[1] Actividad inspirada en Montero, J. (2007). *Estadística Descriptiva*. Thomson: Madrid, España, pp. 40-41.

Ganancia máxima: $250
Ganancia mínima: $225
Rango de ganancias: $250 − $225 = $25

h) ¿Cuál es el rango de ganancia de don Enrique? __________

i) Consideras que doña Queta tiene razón? __________ ¿ Por qué? __________

____

Supongamos que en la tienda de doña Margarita, "La flor dorada", se tuvieron las siguientes ganancias:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Tienda de doña Margarita	$195	$190	$230	$200	$375

Reúnanse en equipos de tres compañeros y, de acuerdo con estos datos, respondan:

j) ¿Qué se puede decir respecto de las ganancias de la tienda de doña Margarita y el valor promedio que lo representa? __________

k) ¿Cuál es su rango de ganancia y qué relación tiene este valor respecto de las ganancias de esta tienda? __________

l) ¿Consideran que el valor del rango es representativo de la distribución de las ganancias de la tienda? Justifiquen su respuesta. __________

____

Actividad 2. El examen sorpresa[2]

La semana pasada la profesora de Matemáticas aplicó un examen sorpresa en sus tres grupos. Los resultados, de acuerdo al número de respuestas correctas, fueron:

a) ¿Qué grupo obtuvo mejor promedio de preguntas acertadas? __________

b) En la Lección 3.8 de su libro Matemáticas 2, trabajaron con promedios y reconocieron que este valor puede ser representativo en función de la situación trabajada. En este caso, ¿consideran que el valor promedio que obtuvieron representa adecuadamente a cada grupo? Justifiquen su respuesta. __________

____

---

[2] Actividad inspirada en el libro: Batanero, C. y Godino, J. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Documento interno de trabajo para la asignatura. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, pp. 3-14 y 3-15.

La profesora está interesada en conocer cuánto varían los datos de cada grupo respecto de la media $\bar{x}$. Ayúdenle respondiendo las siguientes preguntas para cada uno de los tres grupos:

GLOSARIO

Distancia: diferencia entre dos valores. Por ejemplo, la distancia entre el número 17 y el número 5 se obtiene con la resta o diferencia entre estos números por lo que la distancia es igual a 12, esto es, 17 − 5 = 12. La distancia siempre es positiva.

Para el Grupo A

c) ¿Cuál es la **distancia** entre cada número de respuestas correctas y la media $\bar{x}$?

____

d) Si la suma de todas estas distancias es 28, ¿cuál es el promedio de estas distancias? __________

Para el Grupo B

e) ¿Cuál es la distancia entre cada número de respuestas correctas y la media $\bar{x}$?

____

f) ¿Cuál es la suma de todas las distancias? __________

g) Si el promedio de las distancias es 2.25, ¿qué nos dice este valor con respecto al grupo A? __________

Para el Grupo C

h) ¿Cuál es la distancia entre cada número de respuestas correctas y la media $\bar{x}$?

____

i) ¿Cuál es la suma de todas las distancias? __________

j) ¿Cuál es el promedio de estas distancias y qué nos dice respecto a los grupos A y B?

____

Ya que obtuvieron la variabilidad de los datos de cada grupo respecto de su media, formen equipos de trabajo para responder lo siguiente:

k) En la actividad se obtuvieron dos tipos de promedios: el primero corresponde al promedio de los datos y el segundo es el promedio de las distancias entre cada dato con el primer promedio. ¿Cómo se representan los valores del segundo promedio en las gráficas dadas? __________

¿Qué nos dicen sobre el primer promedio? Justifiquen su respuesta. __________

____

Una síntesis...

Para analizar un grupo de datos, es importante realizar un análisis mediante dos preguntas:

1. ¿Alrededor de qué valor se agrupan los datos?
2. Dado que se agrupan alrededor de un dato, ¿cómo es su variabilidad, es decir, cómo se agrupan?

Para la primera pregunta se utilizan las medidas de centralización: media, mediana y moda. La medida más utilizada para estos casos es la media o el promedio $\bar{x}$, el cual se calcula con la suma de todos los valores dividida entre el número total de datos.

Para la segunda pregunta se utilizan las medidas de dispersión, por ejemplo, el rango y la desviación media, las cuales cuantifican la separación o variabilidad de los datos alrededor de una medida central. Las medidas de dispersión también se usan para definir rangos de "normalidad" de algún fenómeno, por ejemplo, los rangos "normales" de glucosa en la sangre, o la concentración "normal" de cierta sustancia en la sangre.

Según lo que trabajaron en esta lección, ¿qué es el rango de un grupo? ____________ ¿Cómo hacen para encontrarlo? ____________ Dados dos datos del conjunto que se analiza, ¿qué les permite identificar de ellos esta medida de dispersión? ______

____

También trabajaron la desviación media, que es la medida de dispersión más utilizada en la estadística y la cual obtuvieron al promediar las distancias de cada dato con la media $\bar{x}$. ¿Qué información nos proporciona esta medida de dispersión?

____

LOS MÉTODOS

Las medidas de dispersión o de variabilidad expresan la manera en que se distribuyen los datos mediante un número. Este número indica si dichos datos se encuentran alejados o concentrados del promedio. Si el valor de este número es muy alto, ¿cómo influye en la variabilidad? ________________________

Y si el valor es muy pequeño, ¿qué características tendrá la distribución de los datos? ________________________

Si dominan estas relaciones, podrán saber si los datos son parecidos o varían mucho entre ellos.

Por ejemplo, en la Actividad 1 las ganancias de don Enrique y doña Queta se expresaron con la siguiente tabla:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Tienda de don Enrique	$100	$120	$350	$370	$250
Tienda de doña Queta	$225	$240	$230	$250	$245

Si calculan el valor promedio de la ganancia de ambas tiendas, el resultado es el mismo. Sin embargo, la distribución de los datos es muy distinta en cada caso. ¿Por qué consideran que sucede esto? ________________________

Aunque el promedio en ambos casos es de $238, en la tienda de don Enrique ningún día de la semana su ganancia se aproxima a este valor promedio; por el contrario, en la tienda de doña Queta la ganancia de casi todos los días de la semana se aproximan de manera considerable a este valor promedio.

Para conocer el grado de representatividad del valor promedio en el conjunto de datos, es decir, si este valor representa satisfactoriamente o no toda la información de la distribución de datos, es preciso cuantificar la distribución o variabilidad a través de las medidas de distribución más comunes: *el rango y la desviación media*.

Rango o amplitud

El rango es la medida de dispersión que indica el tamaño de la región en el que tenderán a dispersarse los datos:

$$R = \textit{Valor máximo} - \textit{Valor mínimo}$$

En el ejemplo,

$$\text{Tienda de don Enrique, } R = 270$$
$$\text{Tienda de doña Queta, } R = 25$$

Ya que en ambos casos se tiene el mismo número de datos y como el rango de la tienda de doña Queta es menor, se puede suponer que estos valores son mucho menos dispersos que los de la tienda de don Enrique.

Esta medida de distribución tiene la ventaja de ser muy sencilla de calcular. Su principal desventaja es que sólo depende de los valores extremos. ¿Qué ocurre cuando uno de estos valores se encuentra muy alejado o es atípico? ________________

____

En el mismo ejemplo se propuso analizar las ganancias de la tienda de doña Margarita:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Tienda de doña Margarita	$195	$190	$230	$200	$375

Al calcular el rango correspondiente y obtener como resultado un valor grande, pareciera expresar que los valores no se encuentran distribuidos de manera homogénea. Sin embargo, notamos que $375 es el dato atípico causante de este valor en el rango. ¿Qué se puede decir de la distribución de datos de estas tres tiendas con relación al tamaño de su rango correspondiente? ________________

____

Entonces,

¿Qué representa el rango?

____

____

____

¿Cómo se obtiene?

____

____

____

GLOSARIO

Valor absoluto: expresa la distancia que hay entre dicho número y el cero, por lo que se expresa con el valor numérico siempre con signo positivo. El símbolo del valor absoluto es $|\ |$. Por ejemplo, el valor absoluto de 5 es $|5| = 5$ y el valor absoluto de -5 es $|-5| = 5$.

Desviación media

En la Actividad 2 se analizaron los resultados de un examen que aplicó una profesora a tres grupos de estudiantes. Para el grupo A la información se puede resumir en la siguiente tabla. Completen los datos que falten:

Grupo A			
Respuestas correctas (RC)	Frecuencia (F)	$\lvert RC - \bar{x}\rvert$	$\lvert RC - \bar{x}\rvert$*F
1	1	$1 - 3.5 = 2.5$	$2.5*1 = 2.5$
2	2		
3	17	$3 - 3.5 = 0.5$	
4	17		$0.5*17 = 8.5$
5	2		
6	1		
Total	**40**		**28**

Total de datos: 40

$$\bar{x} = \frac{(1*1)+(2*2)+(3*17)+(4*17)+(5*2)+(6*1)}{40} = \frac{140}{40} = 3.5$$

$$\text{Desviación media} = \frac{28}{40} = 0.7$$

Por lo tanto, la desviación media del grupo A es igual a 0.7. ¿Cuál es la desviación media de los grupos B y C? ____________________

Con ayuda de tu profesor, respondan lo siguiente: ¿qué información nos proporcionan los valores de la desviación media de los tres grupos respecto a la distribución de los datos de cada grupo? ____________________

¿Qué representa la desviación media?

____

____

¿Cómo se obtiene?

____

____

PARA HACER

1. La empresa "Pancho Villa" lleva la siguiente relación de los días que sus empleados no justificaron inasistencia durante un año:

Faltas injustificadas	Frecuencia
0	50
1	38
2	30
3	25
4	7

a) ¿Cuál es el número promedio de faltas injustificadas al año? ____________________

b) ¿Qué expresa la medida del rango con relación a la distribución de datos?

____

c) ¿Cuál es la desviación media de los datos? ____________ ¿Qué nos expresa esta medida? ____________________

2. Un disco compacto contiene 12 canciones; la duración de cada una se muestra a continuación:

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
3:18	2:58	5:05	4:15	4:33	3:46	4:31	5:09	3:30	3:46	5:13	4:11

a) ¿Cuál es el promedio de duración de una canción del disco? ____________________

b) ¿Cuál medida de dispersión consideras que representa mejor la distribución de la duración de las canciones? Justifiquen su respuesta y compárenla con la de sus compañeros. ____________________

3. Pregunten a sus compañeros de grupo cuántos hermanos tienen y cuáles son sus edades. Ordenen la información en una tabla de datos. Con los datos obtenidos respondan lo siguiente:

a) ¿Cuál es el promedio de las edades de sus hermanos? ____________________

b) ¿Qué pueden decir sobre el rango?

____

c) ¿Cómo es la distribución de los datos respecto al promedio?

____

4. Frida tiene las siguientes calificaciones: 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10. Mientras que las de Alba son: 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10. ¿Cuál de las dos tiene mayor dispersión en sus calificaciones? ____________________

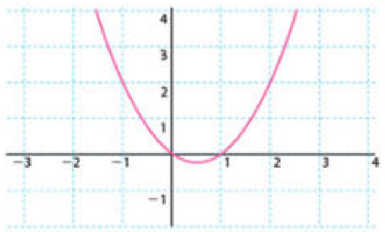
En esta lección aprendieron que para encontrar un valor representativo de un conjunto de datos, no es suficiente hallar una medida central (media, mediana o moda), sino que es igual de importante tener en cuenta la manera en que se distribuyen los datos alrededor de esta medida central. Esta información ayuda a analizar ciertos niveles de "normalidad", como por ejemplo, la cantidad de horas adecuadas para ver la televisión. Las medidas de dispersión que se estudiaron son el rango y la desviación media, ¿qué información nos proporciona cada una?

En su cuaderno realicen una síntesis de lo aprendido en esta lección. Incluyan reflexiones del tipo: ¿cómo se obtiene el rango y la desviación estándar de un conjunto de datos?, ¿qué pasa con las medidas de dispersión cuando se tiene un dato atípico?, ¿qué significa que la medida del rango sea muy grande o muy pequeña?, ¿qué información me proporciona un valor muy grande o muy pequeño de la desviación estándar?, ¿puede haber una medida de dispersión negativa?, ¿por qué?

EVALUACIÓN

1. Diferentes representaciones

Las siguientes representaciones corresponden a alguna sucesión cuadrática. Llena la tabla según la representación que haga falta ¿Cuál es la representación más fácil de analizar para obtener las otras?

<table>
<tr><th>Representación gráfica</th><th>Representación algebraica</th><th>Representación tabular</th></tr>
<tr><td>

Gráfica</td><td>Expresión algebraica</td><td>Tabla de valores</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>$x^2 - x + 1$
Expresión algebraica</td><td>Tabla de valores</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>Expresión algebraica</td><td><table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td></tr>
</table>Tabla de valores</td></tr>
</table>

2. El mejor eje de simetría

Un diseñador está desarrollando un proyecto para la elaboración en la computadora de algunos gráficos en 3D. Para esto utiliza un software profesional y pone en funcionamiento sus conocimientos de geometría.

Para el diseño en 3D de los siguientes objetos, el software requiere considerar siempre un eje de simetría y un dibujo plano, a fin de que aquel se utilice como eje de rotación y de esta manera se formen las figuras.

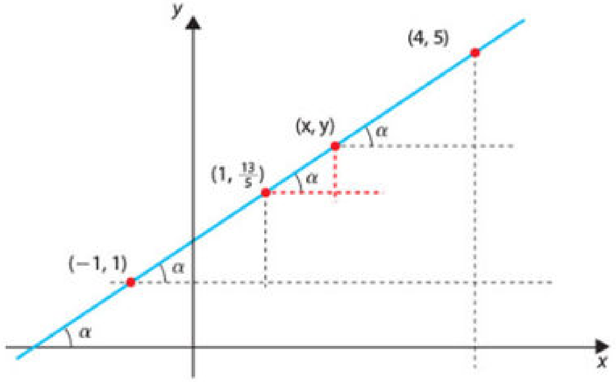
a) ¿Consideras que en todas las figuras es posible dibujar algún eje de simetría? Dibújalo en caso de que tu respuesta sea afirmativa.

b) ¿Cuáles serían los desarrollos planos que haría el software para cada figura? Traza los bosquejos para cada figura en caso de que sea posible. Da argumentos de tu respuesta.

EVALUACIÓN

3. Una escalera... diferente

El siguiente modelo matemático representa el bosquejo de una escalera donde los escalones están distribuidos de manera peculiar.



a) Don Alfredo advierte que si se deja caer una tabla (recta azul) sobre la escalera y ésta toca todos los bordes de los escalones (puntos rojos) entonces la escalera quedará bien hecha. ¿Qué puedes decir de la afirmación de don Alfredo? Da argumentos de tu respuesta.

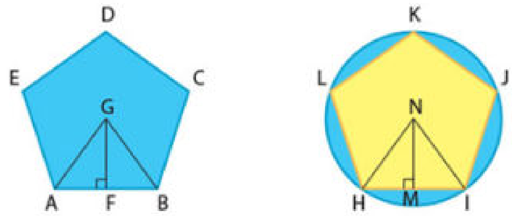
b) ¿Cuál es le valor de la pendiente que está asociado a esta escalera?

c) Don Alfredo decide solucionar el problema de las medidas de los escalones (huella y contrahuella) pero antes se pregunta si con el ángulo que tiene asociado la escalera podría utilizarse para exteriores. ¿Cuál sería tu respuesta? Da argumentos matemáticos.

d) Encuentra la ecuación de la recta que está asociada a la inclinación de la escalera? Utiliza el punto (x, y) y un punto conocido del modelo.

4. ¡Un reto con áreas!

Considera los siguientes pentágonos regulares ABCDE y HIJKL, los cuales son congruentes entre sí. Cada uno de sus lados mide 3.5 cm y los puntos G y N son sus respectivos centros. Desarrolla una estrategia para encontrar en cada uno el área coloreada de azul. Ten en cuenta las siguientes preguntas:



a) ¿Qué tipo de triángulos son GAF y GBF? ¿Qué relación tienen? Justifica tu respuesta.

____

b) ¿Cómo se relaciona el segmento GA y el ángulo EAB? ¿Y el segmento GB con el ángulo CBA? ¿Por qué? ______________

c) ¿Cuál es la medida de los ángulos FAG y FBG? ______________

¿Y de los ángulos AGF y BGF? ______________

d) De acuerdo con tus resultados anteriores y la información dada, ¿qué relaciones trigonométricas se pueden establecer entre los ángulos y los lados del triángulo GAF? ______________

e) ¿Cuál es el área del triángulo GAF? ______________

¿Y la del triángulo GAB? ______________ Calcula el área del pentágono.

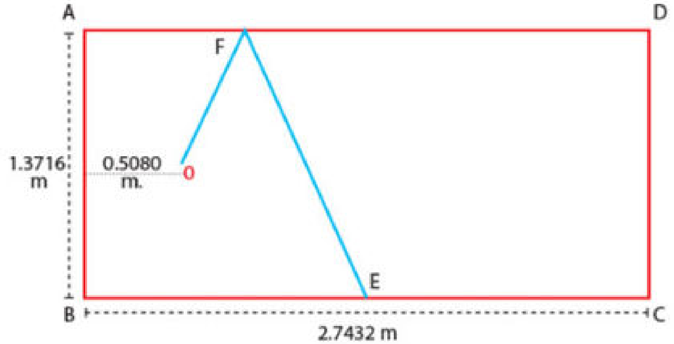
f) ¿Cuál es el área del triángulo NHI? Justifica tu respuesta. ______________

____

g) Determina el área coloreada de azul en el segundo caso. ______________

5. En el billar

Una bola de billar se golpea desde un punto *O* que se encuentra a 0.508 m al interior de la mesa y a la mitad de los lados, como se muestra en el dibujo. Se sabe que la pelota cae en la buchaca en *E*, que se encuentra a medio camino entre *B* y *C*, y que las dimensiones de la mesa son de 1.3716 m por 2.7432 m; además, el ángulo *AFO* es igual al ángulo *DFE*. Con base en estos datos, determina la longitud de *OF* y la amplitud del ángulo *AFO*.



6. La mejor distribución

Se quiere analizar la distribución de cerillos en sus cajas. Para ello se tomaron diferentes muestras del número de cerillos por cajas. Si se sabe que en promedio hay 45 cerillos por caja y que se espera un rango máximo de 10:

a) ¿Cuál de las siguientes listas de datos representa una mejor distribución?

- *i.* 50, 45, 43, 50, 43, 45, 45, 40,49, 40
- *ii.* 43, 42, 44, 44, 46, 44, 48, 46, 47, 46
- *iii.* 45, 45, 44, 39, 46, 50, 46, 44, 45, 46

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes listas de datos representa la mejor distribución de cerillos en las cajas?

i. 43, 42, 44, 44, 46, 44, 48, 46, 47, 46
ii. 45, 45, 44, 39, 46, 50, 46, 44, 45, 46
iii. 45, 46, 47, 46, 44, 44, 41, 46, 44, 46

Autoevaluación

Reflexiona acerca de lo que has aprendido en este bloque para resolver los problemas anteriores. Reproduce esta tabla en tu cuaderno y complétala considerando una escala del 1 al 5, donde 1 es "Totalmente en desacuerdo" y 5 "Totalmente de acuerdo".

Utilicé en la resolución de situaciones	Logré comprender y aplicar los conocimientos al resolver situaciones con	Usaría en la vida cotidiana lo que aprendí con
expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.		
las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.		
el significado del rango y la desviación media y obtuve su cálculo.		

Coevaluación

Con un par de compañeros intercambien sus evaluaciones, comenten y comparen las respuestas que propusieron en ellas y analicen coincidencias y diferencias. Preparen una explicación para cada problema de la evaluación y conviertan sus inquietudes o dificultades en preguntas para compartirlas con el grupo y su profesor. Reflexionen también, con sus compañeros y profesor, sobre lo señalado en la tabla de autoevaluación. Es importante compartir tus dificultades y tus fortalezas con tus compañeros; aprovechen ese espacio para aclarar cada duda que tengan y consolidar sus conocimientos.

Los invitamos a que después del debate completen una tabla que sea producto del consenso del grupo. Esta experiencia les servirá para consolidar sus aprendizajes antes de pasar al siguiente bloque.

BLOQUE 5

Seguramente has usado conos de papel o plástico como los de la figura de abajo para tomar agua. ¿Te has preguntado cuánta agua consumes por cada uno que bebes? Regularmente los conos de papel que usamos tienen una capacidad de 4 o 6 onzas, ¿cómo podrías verificar esto? ¿Qué cantidad es en mililitros? Comenta con tus compañeros las estrategias que usarían para verificar la capacidad de estos conos. Pueden conseguir un cono para hacer los planteamientos y conjeturas que consideren.

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

LECCIÓN 5.1

En esta lección aprenderás a resolver problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones y a formular problemas a partir de una ecuación dada.

PARA APRENDER

Actividad 1. Subiendo con un andamio

Una empresa construye un sistema de poleas para sujetar un andamio de manera que pueda subir y bajar a velocidad constante. Para verificar el funcionamiento del sistema de poleas hace varias pruebas, anotando la altura a la que llega el andamio cada cinco segundos, con lo cual genera la siguiente tabla de datos.

a) Completen esta tabla.

Tiempo (s)	Altura (m)
0	0
5	10
10	20
15	
20	

Trabajen con dos compañeros y respondan las siguientes preguntas:

- Luego de 40 s, ¿a qué altura se encuentra el andamio? ______________
- ¿Qué tiempo tarda el andamio para estar a 55 m de altura? ____________
- ¿A qué velocidad sube el andamio? __________________________
- ¿Qué expresión algebraica describe la subida del andamio? ____________

b) Una segunda recopilación de datos genera la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Altura (m)
0	5
5	7.5
10	15
15	22.5
20	

¿Sabías que?

Las tablas que utilizamos para organizar la información ya eran utilizadas por civilizaciones como la babilónica unos 2000 años antes de nuestra era. Si les interesa conocer más, hallarán información en el Centro Virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española: http://divulgamat2.ehu.es/ (consultada en septiembre de 2013)

Luego de completar la tabla, analícenla con sus compañeros y contesten las preguntas.

- ¿A qué altura se encontraría el andamio luego de 40 s? ______________
- ¿Qué tiempo tardaría el andamio para estar a 20 m de altura? ____________
- ¿Cuál sería la expresión algebraica que describe el movimiento del andamio en este caso? ______________________________

¿Qué características tienen los valores de ambas tablas? En otras lecciones han trabajado este tipo de ecuaciones; revisen sus libros para recordar cómo abordaron estos fenómenos.

Actividad 2. Galileo y la caída libre de objetos

Cuenta una vieja historia que una mañana Galileo Galilei (1564-1642), que en esa época era profesor de la Universidad de Pisa, caminaba hacia la Torre de Pisa con varios de sus alumnos. Galileo ascendió siete pisos de la torre, famosa por su inclinación, y tiró dos objetos al mismo tiempo; el primero era una bala esférica de cañón hecha de hierro fundido y el segundo era otra bala pero de un fusil, también esférica y de hierro, diez veces más ligera que la primera. Galileo pudo comprobar cómo la bola más pesada y de mayor tamaño no adelantó en su caída a la otra que era más pequeña y más ligera. Ambas caían y tocaban el suelo casi al mismo tiempo. Con este experimento Galileo demostró que si los objetos no son frenados por el aire, los cuerpos caen a la Tierra con la misma velocidad, aunque sus pesos sean diferentes.

a) Investiguen con sus compañeros la vida de Galileo y su época. ¿Cuáles fueron los aportes más significativos de este investigador a la ciencia? ______________
____

b) Busquen también la expresión algebraica general que describa la caída libre de un objeto y comenten el significado de cada una de las letras que aparecen en ella. ______________________________________

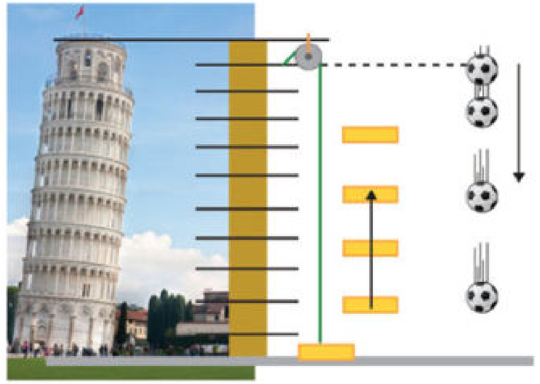
c) Si dejamos caer un objeto desde la Torre de Pisa a una altura de 50 m, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo? ______________________

GLOSARIO

Torre de Pisa: campanario de la catedral de la ciudad italiana homónima. Es mundialmente conocida como la Torre inclinada de Pisa, ya que desde inicios de su construcción, en el siglo XII, comenzó a inclinarse. La Torre se encuentra actualmente inclinada unos 4° y gracias a estudios y trabajos realizados por ingenieros, se ha logrado mantenerla en pie y evitar que siga inclinándose.

Actividad 3. Encuentros en una caída

Sigamos imaginando que estamos en Italia subidos en la Torre de Pisa, como en la Actividad 2, y que construimos un sistema de poleas para elevar andamios a velocidad constante, como en la Actividad 1. Luego tiramos un balón desde 50 m de altura, casi en la punta de la torre, pues ésta mide aproximadamente 55 m. Al mismo tiempo empezamos a subir desde el piso el andamio a velocidad de 2 m/s. Escriban los datos del problema en el dibujo (cada pasarela está colocada a cinco metros).



a) Analicen con sus compañeros las posibles expresiones algebraicas que describan este problema. ________________________________

b) ¿En qué tiempo la pelota chocará con el andamio? ________________

Recuerden que la subida del andamio se describe mediante una expresión algebraica lineal: $h = vt$ (donde h = altura; v = velocidad y t = tiempo), en tanto que la caída de la pelota se rige por la expresión: $h = 4.8t^2$.

Actividad 4. En el autobús

Una familia desea viajar a Acapulco desde la Ciudad de México, por lo que compra dos boletos de adulto y tres de estudiante, gastando $1 557.50 en total.

Si se asigna a = Boletos de adulto y e = boletos de estudiantes, es posible formar la siguiente ecuación que describa la compra:

$$2a + 3e = 1\,557.5$$

Por otro lado, un abuelo y sus dos nietos (estudiantes) van en el mismo viaje, pagando $890 a la misma empresa.

a) Escriban la expresión que describa la compra de boletos realizada por el abuelo.

____

b) ¿Cuánto cuesta un boleto de adulto? ________________

c) ¿Cuál es el precio de un boleto para estudiante? ________________

d) ¿Cuáles fueron las estrategias que usaron para resolver esta actividad? ________

____

Comenten con sus compañeros las distintas estrategias y decidan cuál es la más cómoda.

Una buena opción para reforzar las ideas involucradas en este tipo de problemas consiste en repasar lo estudiado en las lecciones 5.1 y 5.2 de segundo grado.

Una síntesis...

En esta lección trabajaron con dos tipos de ecuaciones y con sistemas de ecuaciones. A continuación les proponemos que revisen todo lo trabajado hasta ahora en este libro y en equipos de tres, hagan una síntesis.

	Ecuaciones lineales	Ecuaciones cuadráticas
Expresión algebraica		
Enuncien al menos dos estrategias para resolver las ecuaciones		
¿Qué estrategia les resulta más cómoda?		
Enuncien al menos dos ejemplos de fenómenos que se representen con		
¿A qué lecciones de este libro podrían recurrir para consultar sobre estos temas?		

Respecto de los sistemas de ecuaciones, como conclusión respondan las siguientes preguntas (recuerden que pueden consultar todo lo trabajado hasta el momento):

1. ¿Cuándo y para qué se usan los sistemas de ecuaciones? ________________
____
2. ¿Puede proponerse un sistema de ecuaciones con una ecuación lineal y una cuadrática? __________ ¿Con dos lineales? __________ ¿Con dos cuadráticas? __________ Justifiquen ampliamente su respuesta y aquellas en las que sea posible, den un ejemplo. (Pueden usar los ejemplos vistos en el libro o inventar los propios). ________________________________
3. ¿Qué métodos conocen para resolver los sistemas de ecuaciones? Enúncienlos y describan brevemente su procedimiento. ________________________

LOS MÉTODOS

En la sección anterior enunciaron al menos dos estrategias o métodos para resolver las ecuaciones lineales y cuadráticas; también lo hicieron para los sistemas de ecuaciones. Formen grupos de tres compañeros para desarrollar los métodos que enunciaron, por ejemplo:

- Para resolver ecuaciones de primer grado:

i. Si a los dos miembros de la igualdad se les suma o resta el mismo número, la ecuación mantiene la igualdad. Dada la siguiente ecuación, ¿cómo se resolvería usando este método?

$$x + 7 = 10$$

ii. Si a los dos miembros de la igualdad se les multiplica o divide por el mismo número (distinto de cero), la ecuación mantiene su igualdad. Por ejemplo:

$$3x = 14$$

Utilizando este método determinen el valor de x.

iii. Si los miembros de la igualdad se elevan a una misma potencia, o se extrae la misma raíz, la ecuación mantiene su igualdad. Por ejemplo:

$$4x^2 = 25$$

Utilizando lo mencionado, encuentren el valor de x.

Resolver ecuaciones exige encontrar sus soluciones; es decir, hay que determinar los valores de la(s) incógnita(s) que satisfacen la ecuación dada.

- Para resolver ecuaciones de segundo grado:

En grupos de tres compañeros, tomando como ejemplo el caso de las ecuaciones lineales, hagan una síntesis de los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas. Recuerden que en lecciones anteriores, por ejemplo en la Lección 3.1, trabajaron este tipo de problemas.

- Para resolver sistemas de ecuaciones:

Existen también situaciones donde se requiere involucrar a más de una incógnita, por lo que se necesita el mismo número de ecuaciones para hallar los valores buscados. Por ejemplo, en el caso de los números buscados en el primer párrafo de esta sección, podríamos haber creado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

TIC

Les proponemos buscar en internet videos sobre la resolución de sistemas de ecuaciones y que discutan con su profesor cuál es el mejor que encontraron. Luego de analizarlo, preséntenlo a sus compañeros para enriquecer la discusión del tema en clase. Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver las actividades 45 y 46 del Bloque V, páginas 113 y 114 de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*, la cual pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf, (consultar en octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

$$\begin{cases} n + M = 97 \\ M = n + 9 \end{cases}$$

y resolverlo utilizando el método de sustitución, es decir, remplazando M en la primera ecuación con la expresión que aparece en la segunda ecuación. Háganlo y encuentren la respuesta. ______

Ocurre lo mismo en la siguiente situación, en cuanto a la edad de Juan y María, las cuales habríamos calculado escribiendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} J = 30 - M \\ JM = 221 \end{cases}$$

y utilizar también el método de sustitución, por ejemplo, para resolverlo y determinar las edades de Juan y María. ¿Qué edades tienen cada uno? ______

______

PARA HACER

1. Reúnanse con un par de compañeros y redacten en su cuaderno un problema que tenga las siguientes características:
   i. Que implique generar una ecuación cuadrática.
   ii. Que las soluciones de la situación planteada sean: 4 y 10.
   iii. Que se requiera un sistema de ecuaciones.
   a) Resuelvan con sus compañeros los problemas que crearon y analicen la mejor manera de resolverlos.
   b) Intercambien con otros equipos sus problemas al azar y resuélvanlos. Acuerden con sus compañeros si se ha logrado el objetivo de la actividad y verifiquen las soluciones.
2. Determinen el valor de los lados del siguiente triángulo rectángulo:

   a) Si $\overline{AC} = 16$, $\overline{AB} = x + 1$ y $\overline{BC} = x - 3$.
   b) Si el área del triángulo es 16, $\overline{AC} = z + 1$ y sus catetos son iguales.
   c) Si $\overline{AB}$ es el doble de $\overline{BC}$ y su perímetro sea 12.
3. Completen la siguiente tabla, que relaciona el valor de los lados de triángulos rectángulos, en los cuales su perímetro es 12 y su área 6. ¿Todos pueden trazarse? ______

Cateto	Cateto	Hipotenusa
3	4	
9		
	2	
		6

4. Si el área de un rectángulo es $16x^2 - 9$, ¿cuál es su perímetro? ______
5. Se deja caer un objeto desde un edificio de 300 m de altura. Calculen el tiempo que tarda en llegar al suelo. ______
6. Un objeto que estaba situado inicialmente en el piso se lanza hacia arriba con una velocidad de 60 m/s.
   a) Calculen la máxima altura que logra. ______
   b) El tiempo en el que alcanza la mayor altura. ______
   c) ¿Cuánto tiempo transcurre para llegar al suelo? ______
7. En una papelería dos cuadernos y cinco plumas cuestan $149.10, y seis cuadernos y tres plumas cuestan $382.50. ¿Cuál es el costo de cada artículo? ______
8. Franco quiere comprar un libro y recurre a su alcancía que tiene monedas de uno, dos, cinco y 10 pesos. El total de monedas es 101 y el dinero suma $315. La cantidad de monedas de un peso es el triple que la de monedas de 10. Y la cantidad de monedas de dos pesos es una más que el doble del número de monedas de cinco. ¿Cuántas monedas de un peso tiene? ¿Cuántas de dos? ______
9. ¿Cuántos litros de aceite, de cinco pesos el litro, se mezclaron con aceite de nueve pesos el litro para obtener 300 litros de $7.50? ______
10. Si a un terreno rectangular se le aumentan ocho metros de largo y cinco de ancho, la superficie aumentaría a 425 m²; pero si se disminuye su largo en seis metros y su ancho en tres, entonces la superficie disminuiría a 237 m². ¿Qué dimensiones tiene el terreno? ______

En esta lección identificaron y resolvieron ecuaciones lineales, cuadráticas e incluso sistemas de ecuaciones que las entrelazan y que describen diferentes fenómenos y situaciones. Cada fenómeno que se estudie genera un tipo de expresiones algebraicas, las cuales requieren un tratamiento particular. Busquen ejemplos de fenómenos cuyos valores se puedan predecir resolviendo una ecuación lineal y otros, con ecuaciones cuadráticas. ¿En qué otros casos es necesario generar un sistema de ecuaciones para describir cierta situación? Escriban en su cuaderno los ejemplos, respuestas y las conclusiones a las que arribaron luego de analizarlo en clase.

LECCIÓN 5.2

En esta lección aprenderás a analizar las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto y a calcular las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

PARA APRENDER

Formen equipos para analizar las actividades de esta lección, con base en lo que han aprendido hasta ahora sobre los cuerpos de revolución como el cilindro y el cono rectos. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. Cortes con el plano (Primera parte)

Don Raúl ha tenido mucho éxito con la venta de lámparas de mimbre, sobre todo con los modelos de forma geométrica, y de éstos, los que más vende son los de forma cilíndrica y cónica, como los que se muestran. Dado que don Raúl es muy creativo, ha decidido variar un poco la forma de estas lámparas. En un principio no tenía claro cómo, por ello hizo los modelos con plastilina para hacer cortes de cierta forma.

Don Raúl comenzó a hacer cortes en ambos modelos; primero se le ocurrió un corte paralelo a la base. En la figura de la derecha se muestra la forma en que procedió.

Al hacer cortes paralelos de la base a ambos modelos, descubrió que se forman circunferencias; pensó que en el caso de las lámparas en forma de cilindro el corte no modificaría en nada el modelo, pero en el caso de las lámparas en forma de cono ideó un modelo diferente; de inmediato lo reprodujo en mimbre y obtuvo el siguiente diseño.

Don Raúl está muy contento porque ya tiene muchos encargos de lámparas con este diseño, por tal razón quiere seguir experimentando con otros cortes en ambos modelos. Ayúdenle a don Raúl a obtener algunos cortes más. A continuación se dan los pasos que siguió para los cortes anteriores. Repítanlos.

1. Primero, con plastilina moldeen un cono y un cilindro de altura conveniente, puede ser de 10 cm.

2. Luego tomen una regla para realizar los cortes que se indican en cada figura. Respondan las preguntas:
   - *a)* En el cilindro, hagan cortes con la regla colocada de forma vertical e inclinada. ¿Qué figuras obtuvieron? ______________ Dibújenlas en su cuaderno.
   - *b)* En el cono, hagan cortes con la regla colocada de forma vertical e inclinada. ¿Qué figuras obtuvieron? ____________ Dibújenlas en su cuaderno.
   - *c)* ¿Cómo son las figuras que se obtienen al realizar de la misma forma el corte en ambos modelos de plastilina? Comparen con los otros equipos las figuras que obtuvieron y clasifíquenlas en una tabla, de acuerdo con la forma de corte. ¿Hay variaciones entre sus figuras aun con la misma forma de corte? __________ ¿Por qué? ____

Como habrán notado, al hacer cortes a los sólidos de plastilina se pueden obtener figuras diferentes, ¿qué cortes le recomendarían a don Raúl simular en las lámparas para generar nuevos diseños? __________ ¿Serán los únicos? Coméntenlo con sus compañeros. ____

Cabe resaltar aquí que, a pesar de que se están usando **sólidos** de plastilina para llevar a cabo los cortes, lo que interesa es la superficie del cono y del cilindro, no el interior, pues las pantallas de las lámparas no tienen interior, son huecas. Por tanto, las figuras que se considerarán, serán sólo las que se forman con la **superficie**.

TIC

Para ver las secciones que se obtienen al cortar un cono por un plano les recomendamos la página: http://www.youtube.com/watch?v=azKyyFqnG-Q&feature=endscreen, (consultada el 30 de octubre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

GLOSARIO

Sólido o cuerpo geométrico: figura geométrica de tres dimensiones (largo, ancho y alto) que ocupa un lugar en el espacio y en consecuencia tiene un volumen.

Superficie: extensión geométrica que posee sólo dos dimensiones (largo y ancho).

Actividad 2. Cortes con el plano (Segunda parte)

Don Raúl le ha pedido a su amigo Felipe que le ayude a idear cortes, ya que sólo pudo imaginar tres diseños diferentes. Felipe empezó a llevar a cabo los cortes de la misma forma que lo hizo don Raúl; sin embargo, a diferencia de éste, Felipe los hizo a diferentes alturas, porque de esta manera piensa obtener otros modelos, y por tanto nuevos diseños. Los primeros cortes los hizo paralelos a la base de las figuras, como los que se muestran en la figura adjunta.

Ayuden a Felipe a hacer los cortes que efectuaste en la Actividad 1 en los modelos de plastilina; hagan otros cortes con la regla colocada de forma vertical e inclinada en diferentes puntos. ¿Encontraron figuras diferentes a las obtenidas en la Actividad 1? ____________ ¿Se cumplió la tarea encomendada a Felipe? ____________ Comenten con su equipo si estos cortes ayudarán a obtener nuevos diseños para las lámparas.

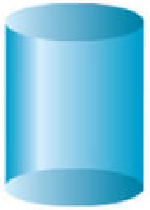
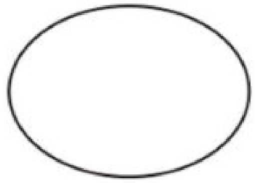
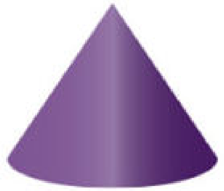
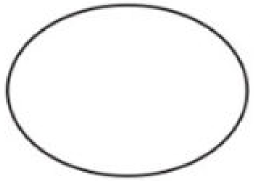
En equipo, elaboren sus conclusiones sobre las diferentes figuras que se obtienen al cortar el cilindro y el cono con un plano inclinado. Describan cómo serán esas figuras si el plano las cortara más de una vez.

Una síntesis...

En las actividades anteriores determinaron las figuras que se obtienen cuando un plano corta a un cilindro y un cono, ya sea éste paralelo a sus bases o inclinado.

En la Actividad 1 habrán notado que la diferencia entre los cortes para obtener diferentes figuras la hace ________ del plano, ¿será la única diferencia o habrá otras? En la Actividad 2, al hacer cortes a los sólidos, también es posible obtener ___________________________, que se verificó con los cortes de Felipe. Comenten con sus compañeros cómo es esto posible.

Además, las figuras que se obtienen al cortar el cilindro se pueden obtener también al hacer el mismo _________ en el cono. Es decir, es posible considerar sólo al cono para obtener las figuras encontradas. Estas figuras se resumen en la siguiente tabla. Con base en lo hecho en las actividades 1 y 2, completen la información.

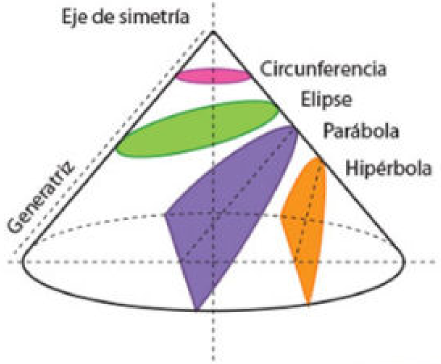
Cuerpo	Figuras obtenidas al cortar con un plano paralelo la base del:	Figuras obtenidas al cortar con un plano inclinado el:
 Cilindro	____________________	 Elipse
 Cono	____________________	 Elipse  Parábola  Hipérbola

Según la tabla y las actividades anteriores, la __________ y la __________ son las únicas figuras que pueden obtenerse al cortar con un plano inclinado ya sea el cono o el cilindro.

De esta manera, y como se mencionó antes, es posible analizar sólo al cono para obtener las figuras de la tabla. Por esta razón, a las cuatro figuras diferentes obtenidas mediante cortes a un cono con un plano se les llama **secciones cónicas**. Es importante que recuerden esto, ya que será tema de análisis en sus estudios posteriores.

GLOSARIO

Secciones cónicas: son todas las curvas obtenidas por la intersección entre un cono y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en cuatro tipos: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.



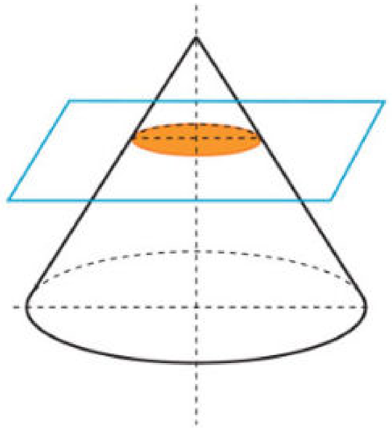
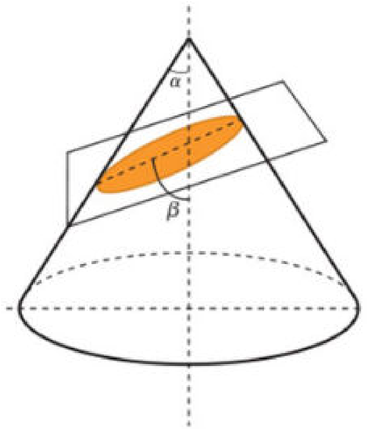
LOS MÉTODOS

En esta lección, reconocieron que cuando el corte del plano es paralelo a la base de un cilindro siempre se obtiene una circunferencia del mismo radio, sin importar dónde se haga el corte. Asimismo, con los cortes paralelos a la base del cono se obtienen circunferencias, aunque de diferente radio. ¿A qué creen que se deba esto?

____

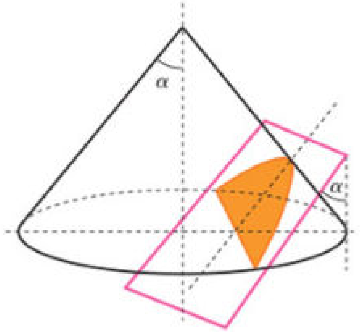
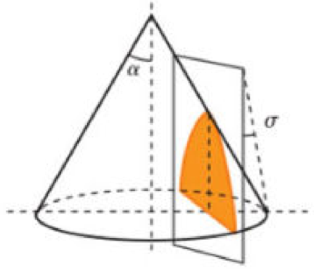
De la misma manera, se pueden obtener diferentes elipses que varían en su anchura, según la inclinación del plano y la altura a la que se realice el corte. En la parábola y la hipérbola varían el alargamiento y abertura de sus ramas.

A continuación se presentan las secciones cónicas y la forma en la que el plano corta al cono para su obtención.

Circunferencia: superficie plana y cerrada que se puede obtener al cortar el cono con un plano paralelo a su base.	
Elipse: curva simétrica cerrada que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano inclinado al eje de simetría. El plano tiene un ángulo mayor (β) que el de la generatriz respecto del eje de revolución (α).	

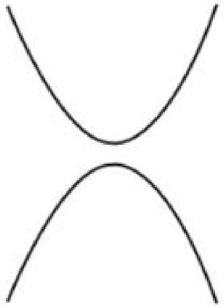
GLOSARIO

Eje de simetría: segmento de recta que corresponde a la altura del cono y que une el centro del círculo con la cúspide, siendo perpendicular a la base.
Generatriz: cada uno de los segmentos cuyos extremos son el vértice y un punto de la circunferencia de la base.

Parábola: figura que resulta de cortar un cono recto con un plano paralelo a su generatriz. El plano tiene el mismo ángulo de inclinación que el de su generatriz respecto del eje de revolución (α).	
Hipérbola: curva abierta obtenida al cortar un cono recto por un plano inclinado al eje de simetría, y con ángulo menor (σ) que el de la generatriz respecto del eje de revolución (α).	

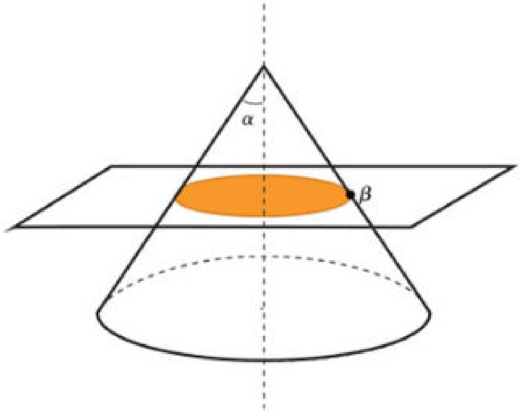
PARA HACER

1. Los estudiantes de tercer grado de secundaria, se propusieron crear un modelo de lámpara usando dos conos. ¿Creen que este modelo será muy bien aceptado por los clientes de don Raúl?.
   a) ¿Qué sección cónica de las que ya conocen se obtiene al realizar un corte como el de la figura? ______________ ¿Cómo debe hacerse para obtener la sección mostrada? ______________ ¿Consideran conveniente que don Raúl use este tipo de cortes? Argumenten su respuesta. ____________________
   b) Suponiendo que a don Raúl le convengan esos cortes, ¿qué otras secciones cónicas pueden obtenerse al usar dos conos como éstos? Con sus compañeros de grupo, analicen todas las posibilidades y la forma de llevarlos a cabo.



La figura obtenida por el amigo de don Raúl recibe el nombre de *hipérbola*. Analicen con sus compañeros si se trata de la misma hipérbola que estudiaron en la Actividad 1.

2. En la síntesis de esta lección se presenta una forma de obtener una parábola. Un plano corta de manera paralela al cono, como se muestra en la figura. Si el ángulo α de la generatriz respecto del eje de revolución mide 45°, entonces determina una medida de inclinación del plano sobre el mismo punto A, con lo cual se obtienen las cónicas siguientes; dibújenlas en su cuaderno.

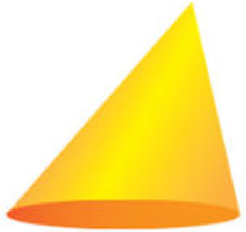


   a) Elipse
   b) Parábola
   c) Hipérbola

3. La siguiente figura es un **cono oblicuo**. Considerando las tres formas en que un plano puede cortar al cono (paralelo a la base, inclinado o vertical), determinen en equipo cómo son las figuras que se obtienen. Dibújenlas en su cuaderno y escriban sus conclusiones.

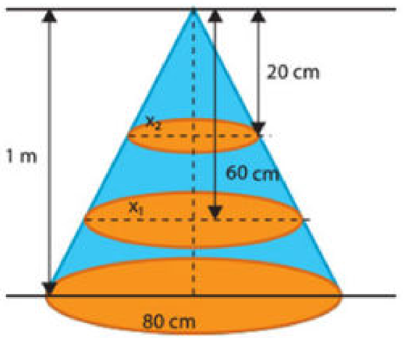
GLOSARIO

Cono oblicuo: cono cuyo eje de revolución no es perpendicular a su base.



¿Las figuras encontradas son las mismas que las obtenidas cuando el cono es recto? ______________ Analicen a qué se debe esto.

4. Un pastelero hará un pastel de bodas; la novia le mostró la foto del pastel que quiere. La novia, que es una maestra de Matemáticas, le proporcionó al pastelero un modelo para que se base en él y pueda hacer el pastel con las medidas exactas; además, le propuso llenar la tabla que se muestra a continuación. Ayuden al pastelero a completar la tabla.



h (altura del cono en cm)	100	60	20
r (radio de la base en cm)	80		

En esta lección aprendieron la manera en que se obtienen las secciones cónicas cuando un plano, ya sea paralelo a la base o inclinado, corta a un cono recto. Además, estudiaron cómo varían las propiedades de las secciones cuando el plano corta con distintas alturas o inclinaciones al cono.

Usen estos conocimientos para establecer una conjetura sobre la relación que guardan la abertura de una parábola y la de una hipérbola. ¿Consideran que de algún corte del plano podría obtenerse una figura que sea parábola e hipérbola al mismo tiempo? Analícenlo en equipo y argumenten su respuesta. Pueden utilizar un cono de papel o de plastilina para visualizar mejor la idea.

LECCIÓN 5.3

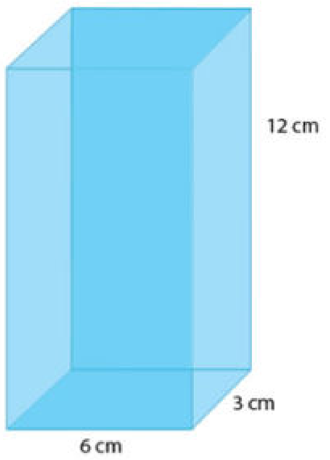
En esta lección construirás las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

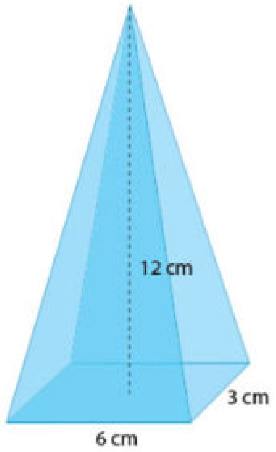
PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. ¿Cuántas veces es más grande el envase?

Una cooperativa envasa jugos de frutas. Los jugos los envasan en empaques de cartón con forma de prismas y pirámides, cuya base es rectangular; en ambos casos tienen las mismas dimensiones y la misma medida de sus alturas, como los que se muestran en la figura adjunta. A partir de esta información analicen y expliquen lo que sigue:





a) ¿Qué cantidad de jugo cabe en un envase con forma de pirámide rectangular?

____

b) ¿Qué cantidad cabe en un envase con forma de prisma rectangular?

____

c) ¿Cuántas veces es más grande el envase de jugo que tiene forma de prisma rectangular respecto del que tiene forma de pirámide rectangular? Argumenten su respuesta. ______________________________

Comparen los resultados que obtuvieron con otro equipo. ¿Son los mismos resultados? __________ ¿Qué estrategias usaron para determinar el volumen de los envases? ______________________________

Actividad 2. ¿Qué alberca elegir?

Don Luis quiere comprar una alberca familiar portátil. La tienda que visitó vende albercas cuyas bases son rectangulares y circulares. El dueño de la tienda le dio las medidas siguientes por cada tipo de albercas de tamaño familiar: la de base rectangular mide 4.20 m (largo) × 2.20 m (ancho) × 84 cm (alto) y la de base circular mide 4.20 m (diámetro) × 90 cm (alto).

De las dos opciones, don Luis quiere elegir la alberca de mayor volumen. Sin embargo, sólo recuerda que para calcular el volumen de la alberca de base rectangular puede usar la fórmula para calcular el volumen de un prisma. En equipo, ayuden a don Luis a resolver su problema. Para hacerlo, consideren los dibujos que representen a cada una de las albercas con las medidas correspondientes.

Calculen el volumen de la alberca en forma de prisma rectangular. Argumenten sus respuestas. Tomen en cuenta preguntas como las siguientes:

a) ¿Cuánto mide el área de la base de la alberca rectangular? ______ ¿Cuánto mide su altura? ______

b) ¿Cuál es el volumen de la alberca rectangular? ______

A partir del razonamiento que usaron para calcular el volumen de la alberca rectangular, determinen el de la alberca de base circular (o en forma de cilindro). Consideren las siguientes preguntas:

c) ¿Cuánto mide el área de la base de la alberca? ______

d) ¿Cuánto mide su altura? ______

Tomando en cuenta lo anterior, analicen cómo utilizar estos datos para saber el volumen de la alberca circular. Escriban sus procedimientos en sus cuadernos.

Después, analicen y escriban la fórmula que usaron para calcular el volumen de la alberca en forma de cilindro.

V = ______ × ______

Prueben con otros casos, por ejemplo cilindros cuyas áreas de sus bases sean iguales y sus alturas midan 5, 10 y 15 cm respectivamente. ¿Funciona la fórmula? ______ ¿Por qué? ______

______

¿La fórmula que determinaron puede usarse para calcular el volumen de cualquier cilindro? ______ ¿Por qué? ______

______

Compartan sus resultados con los demás equipos y luego analícenlos con su profesor. ¿Desarrollaron los mismos procedimientos? ¿Arribaron a las mismas conclusiones? Argumenten sus respuestas.

Actividad 3. Relación proporcional entre el volumen de un cilindro y un cono

En esta actividad utilizarán material concreto para analizar el volumen de un cilindro y un cono que tengan exactamente las mismas medidas del área de sus bases y de sus alturas. Con ayuda de su profesor, construyan con cartulina un cilindro y un cono con estas características, pero antes respondan lo siguiente.

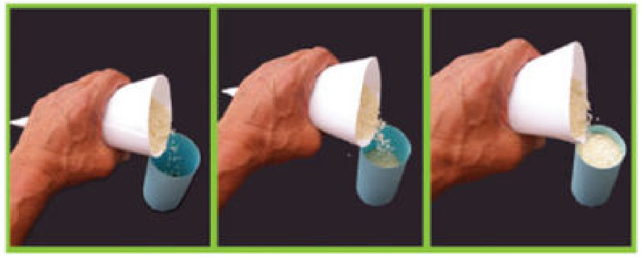
a) ¿Qué forma tiene la base del cilindro y cómo se calcula su área? ______

b) ¿Qué forma tiene la base del cono y cómo se calcula su área? ______

Quiten una de las bases del cilindro y la del cono. Después, analicen el volumen que ocupa cada cuerpo geométrico a partir del siguiente experimento:

Llenen con arroz (o con sal o arena) el cono que construyeron y vacíen el contenido en el cilindro. Ahora midan con una regla graduada la altura que alcanza el volumen de arroz (o con lo que hayan llenado el cono) a fin de saber qué tanto del cilindro se llenó con el arroz (o sal o arena) al vaciar el contenido del cono.

Luego repitan el procedimiento hasta que el cilindro se llene, como se observa en las imágenes.



Con base en su análisis, describan la relación que hay entre el volumen de un cilindro y de un cono que tienen exactamente las mismas medidas del área de sus bases y de sus alturas.

c) ¿Qué relación identificaron entre el volumen del cilindro con el del cono?

______

d) ¿Qué relación existe entre el volumen del cono con el del cilindro?

______

e) Escriban la expresión matemática que muestre la relación que hay entre el volumen del cono y el del cilindro. ______

Una síntesis…

El cilindro es un cuerpo geométrico que tiene una base circular y una altura. Como la base del cilindro es un círculo, ¿cómo se calcula el área de la base?

Área del círculo = π × ______

Tomando en cuenta lo anterior, el volumen de un cilindro se determina mediante la fórmula:

$$\text{Volumen de un cilindro} = \pi r^2 h$$

El cono es un cuerpo geométrico formado por dos superficies, una circular (la base) y la otra curva (superficie lateral). Este cuerpo es el resultado de girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Como base de un cono es un círculo, la fórmula para determinar su volumen es la siguiente:

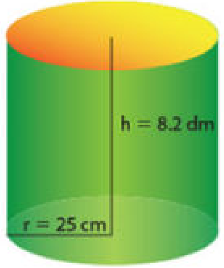
$$\text{Volumen de un cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Recuerden que el valor aproximado de π es 3.1416.

LOS MÉTODOS

Para determinar el volumen de un cilindro y de un cono es importante conocer las fórmulas correspondientes y cómo se obtienen. Asimismo, se deben tener en cuenta las unidades de medida registradas de los elementos de cada cuerpo geométrico, para transformarlas a una misma unidad. Con base en lo que aprendieron, expliquen, en equipo, la manera de calcular el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

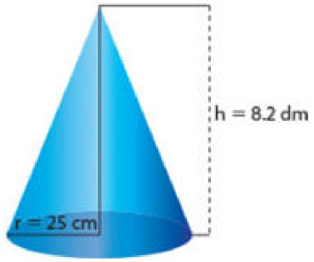
Caso 1: Volumen de un cilindro



Método:

____
____
____
____
____
____
____

Caso 2: Volumen de un cono



Método:

____
____
____
____
____
____
____

PARA HACER

1. Nicolás compró una alberca de forma circular que mide 2.59 m de diámetro por 91 cm de alto, y la colocó en el patio de su casa. No dispone de una manguera, así que para llenarla usa un bote de plástico de forma cilíndrica. Las dimensiones interiores del bote son 30 cm de diámetro por 48 cm de alto.

   Respondan lo siguiente:

   a) ¿Qué volumen del bote ocupa Nicolás, si cada vez que va a la llave lo llena a una altura de 45 cm? ________________________________

   b) ¿Cuántos botes de agua tiene que llevar Nicolás para llenar la alberca a una profundidad de 85 cm? ________________________________

2. Una empresa fabrica silos con forma de cilindro y cono.

   Los silos cilíndricos miden:

Tamaño de silos	Dimensiones	
	Diámetro	Altura
Silo A	10 m	5 m
Silo B	10 m	10 m
Silo C	10 m	15 m

GLOSARIO

Silos: contenedores que se utilizan para almacenar o conservar una extensa gama de productos como granos, semillas, harinas, forrajes, etcétera.

a) ¿Cuál es el volumen de cada silo cilíndrico? ________________________________

Los silos en forma de cono tienen las siguientes medidas:

Tamaño de silos	Dimensiones	
	Diámetro	Altura
Silo D	10 m	5 m
Silo E	10 m	10 m
Silo F	10 m	15 m

b) ¿Cuál es el volumen de cada silo en forma de cono? ________________________________

Con base en los cálculos realizados hasta ahora a partir de los datos de ambas tablas, analicen y expliquen la relación que guarda el volumen de los silos cilíndricos con los cónicos, considerando que su diámetro y su altura son del mismo tamaño. ¿Por qué sucede esto? ________________________________

c) ¿Qué relación existe entre el volumen del silo A con el volumen del silo D? ¿Por qué sucede esto? ________________________________

3. En la tabla siguiente aparecen registradas las medidas de las alturas de cuatro cilindros, cuyos volúmenes son de 100 m^3 cada uno. ¿Cuánto podría medir el radio y el área de la base en cada caso, para que los datos correspondan a la medida del volumen?

Volumen del cilindro = 100 m^3	Radio (r)	Altura (h)	Área de la base (A_b)
Cilindro A		10 dm	
Cilindro B		20 dm	
Cilindro C		30 dm	
Cilindro D		40 dm	

Con base en los datos de la tabla, respondan lo siguiente:

a) ¿Cuántas posibilidades hay para determinar la medida del radio y del área de la base sin que la medida del volumen cambie? ________________________________

b) ¿Qué sucede con la medida del área de la base de los cilindros cuando la altura se incrementa y el volumen se mantiene? ________________________________

¿Qué sucede con la medida del diámetro y el radio? ¿Por qué? ________________________________

____

4. En la tabla siguiente aparecen registradas las medidas de las alturas de cuatro cilindros, cuyos diámetros son de 20 dm cada uno. ¿Cuánto podrían medir el radio y el área de la base en cada caso, considerando la medida del diámetro?

Diámetro del cilindro = 20 dm	Radio (r)	Altura (h)	Área de la base (A_b)
Cilindro A		10 cm	
Cilindro B		20 cm	
Cilindro C		30 cm	
Cilindro D		40 cm	

a) ¿Cuánto mide el radio en cada caso? __________ ¿Cuánto mide el área de la base? ¿Por qué sucede esto? ____

b) ¿Cuántas posibilidades hay para determinar la medida del radio y del área de la base sin que la medida del diámetro cambie? Argumenten su respuesta.

____

5. Una empresa empaca frijoles en latas que miden 5 cm de diámetro y 10 cm de altura.

a) ¿Cuál es el volumen de la lata? ____

b) Se está pensando empacar frijoles en latas que tengan el doble de ese volumen. ¿Qué dimensión se debe incrementar para duplicarlo, el diámetro o la altura? Argumenten su respuesta. ____

____

En esta lección aprendieron que el volumen, tanto del cilindro como del cono, depende del tamaño de su base y de su altura. Si la medida del área de la base de un cilindro y un cono, así como su altura, son iguales, ¿qué relación se establece entre sus fórmulas? Escriban dicha relación matemática. Utilicen los resultados que obtuvieron al calcular el volumen del cilindro y el cono.

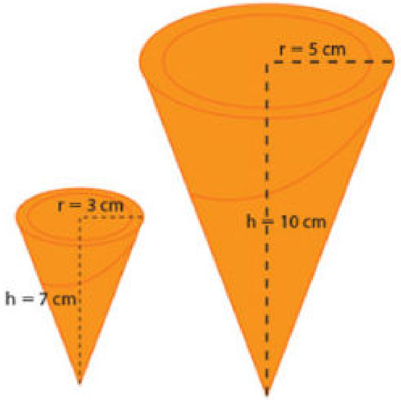
LECCIÓN 5.4

En esta lección aprenderás a estimar y calcular el volumen de cilindros y conos, así como a calcular datos desconocidos, dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.

PARA APRENDER

Formen equipos para analizar y responder las actividades de esta lección. No olviden justificar en cada caso los argumentos que presenten. Al final, compartan sus resultados con los demás equipos y escuchen con atención y respeto los de sus compañeros.

Actividad 1. Estimación del volumen



Una empresa envasa helados en conos de dos tamaños, como los que aparecen en las figuras. Las máquinas que utilizan para su llenado, vierten el helado desde contenedores cilíndricos de un mismo tamaño dejando sin llenar una pequeña parte para evitar desbordamiento de contenido. María, una de las trabajadoras de la empresa, está interesada en saber la cantidad de conos del mismo tamaño que pueden usarse para vaciar el contenido de helado de un contenedor con esas condiciones. Sin realizar operaciones escritas, en equipo, ayuden a María a resolver el problema que se ha planteado. Consideren las siguientes preguntas:

- Si se sabe que la base de los contenedores mide dos metros de diámetro y tres de altura, y que se encuentran llenos de helado a su máxima capacidad, ¿qué cantidad estimada de conos chicos se usaría para vaciar el helado de un contenedor?

  ____

- ¿Cuántos conos grandes se usarían para vaciar el contenido de un contenedor?

  ____

En su cuaderno, describan la estrategia que siguieron para estimar la cantidad de conos.

Ahora analicen el siguiente caso. Si los dos tipos de envases fuesen cilíndricos en lugar de cónicos, pero con la misma base y altura que sus respectivos envases cilíndricos, ¿cuántos envases cilíndricos chicos podrían usarse para vaciar el helado de un contenedor? __________ ¿Cuántos envases grandes? ____________________

Comparen sus conclusiones con otro equipo y valídenlas con su profesor. ¿Siguieron la misma estrategia? __________ ¿Por qué? ____

Actividad 2. Estimación y cálculo de volumen

Una cooperativa agrícola almacena granos de maíz en un silo en forma de cono que mide 30 m de diámetro y 6 000 m^3 de volumen. En la reciente cosecha, los agricultores lograron llenar de maíz 100 contenedores cilíndricos de 2 m de radio y 15 m^3 de volumen, mismos que vaciaron en la unidad de almacenaje. Con base en esos datos, en equipo, contesten lo siguiente:

a) Estimen la altura de la unidad de almacenaje y describan la estrategia que usaron. ____

b) Determinen con exactitud la altura (pueden usar calculadora) ¿qué tan cerca estuvo su estimación? ________________________________

c) Calculen la cantidad exacta de maíz depositada por los agricultores en el silo, así como la parte vacía del silo. ¿Qué tan cerca estuvo su estimación?

____

Compartan sus resultados con otro equipo y valídenlos con su profesor. ¿Desarrollaron las mismas estrategias para estimar la medida de la altura del silo y la parte que quedó vacía? __________ ¿Qué equipo obtuvo una estimación más cercana a la medida real de la altura de la unidad de almacenaje? ____________________

Actividad 3. Calculando volúmenes de conos y cilindros

José vende cacahuates por la tarde para ayudarse con algunos gastos de la escuela. Para empacarlos, usa envases de forma cónica y cilíndrica de diferentes tamaños. En la siguiente tabla aparecen registradas las medidas de los empaques que elabora.

Empaques por tamaño	Elementos del empaque en forma de cilindro		Elementos del empaque en forma de cono		Elementos de la circunferencia (base del cilindro y del cono)	
	h	V	h	V	r	d
Tamaño A	2 cm	________ cm³	_____ cm	33.51 cm³	4	
Tamaño B	________ cm	201.06 cm³	4 cm	________ cm³		8
Tamaño C	8 cm	________ cm³	_____ cm	134.04 cm³	4	
Tamaño D	________ cm	804.24 cm³	16 cm	________ cm³		8

h: altura
V: Volumen
r: radio
d: diámetro

En equipo, completen los datos de la tabla. Con base en ello, respondan lo siguiente:

a) ¿Qué estrategia usaron para determinar la altura del cilindro cuando se conoce la medida de su volumen y la del radio de la circunferencia que conforma la base?

____

b) ¿Qué estrategia usaron para determinar la altura del cono cuando se conoce la medida de su volumen y la del radio de la circunferencia que conforma la base?

____

c) ¿Qué estrategia usaron para determinar el volumen del cono y el del cilindro?

____

¿Qué datos se requieren en cada caso? ____________________________

d) ¿Cómo varían la altura y el volumen del cilindro cuando el radio permanece constante? ____

e) ¿Cómo varían la altura y el volumen del cono cuando el radio permanece constante? ____

Una síntesis...

En esta lección estimaron y calcularon el volumen de cilindros y conos. También calcularon datos desconocidos con base en otros que se relacionan con las fórmulas del cálculo de volumen de este tipo de cuerpos geométricos. Aprendieron que en el cálculo estimado suele trabajarse con cantidades redondeadas para facilitar los cálculos y que, a su vez, este tipo de estrategia se sustenta en el cálculo mental.

En los cálculos estimados que realizaron, emplearon la fórmula para estimar el volumen o la altura de un cilindro y un cono, lo cual involucra al número π. ¿A qué número redondearon el valor de π? ____________________________

LOS MÉTODOS

En la Lección 5.3 aprendieron que el volumen de un cilindro puede determinarse mediante la expresión:

$V_{\text{Cilindro}} = A_b \times h$, donde A_b es el área de la base y h es la altura del cilindro. En cualquier cilindro, el área de la base es una circunferencia y su área se determina por la fórmula: $A_{\text{Circunferencia}} = \pi r^2$, donde r es el radio de la circunferencia. Con base en estos datos, escriban la fórmula para calcular el volumen de un cilindro:

$V_{\text{Cilindro}} =$ ____________________

Algo similar sucede si se quiere determinar el volumen de cualquier cono. Éste puede determinarse mediante la expresión:

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{A_b \times h}{3}$, donde A_b es el área de la base y h es la altura del cono. En cualquier cono, el área de la base es una circunferencia cuya área se determina por la fórmula: $A_{\text{Circunferencia}} = \pi r^2$ donde r es el radio de la circunferencia. Con base en estos datos, escriban la fórmula para calcular el volumen de un cono:

$V_{\text{Cono}} =$ ____________________

A partir de estas fórmulas, se puede determinar cualquiera de las dimensiones de las figuras que limitan a estos cuerpos geométricos.

Si se conoce el radio de la circunferencia y el volumen de un cilindro o de un cono (r_{Cilindro}; r_{Cono}) y el correspondiente volumen (V_{Cilindro}; V_{Cono}), la medida de la altura de cada cuerpo geométrico (h_{Cilindro}; h_{Cono}) puede obtenerse realizando un despeje algebraico. Con base en los análisis y los resultados a los que llegaron a lo largo de esta lección, determinen las siguientes fórmulas:

Altura de un cilindro

$h_{\text{Cilindro}} =$ ____________________

Altura de un cono

$h_{\text{Cono}} =$ ____________________

Si por el contrario, sólo conocemos la altura y el volumen de un cilindro o un cono, entonces, se puede determinar la medida del radio y, con ello, el área de la base:

Radio de un cilindro

$r_{\text{Cilindro}} =$ ____________________

Radio de un cono

$r_{\text{Cono}} =$ ____________________

PARA HACER

1. Un cono mide cinco centímetros de altura y el radio de su circunferencia cuatro. Otro cono mide cuatro centímetros de altura y el radio de su circunferencia es de cinco. Con base en estos datos:
   - *a*) Estimen cuál de los dos conos tiene el volumen más grande. Expliquen su estimación. ____________________
   - *b*) Calculen el volumen de cada cono. ¿Qué tan cerca estuvo su predicción? ____________________

2. María compró dos copas de cristal de forma cónica, una de tamaño grande y otra mediana. Quiere saber qué cantidad de jugo de una lata de 355 ml le cabe a cada copa. Su primera estrategia consistió en vaciar el contenido de jugo en la copa grande, sin embargo, se llenó antes de que la lata quedara vacía. Así que decidió medir la altura y el ancho de cada copa con una regla graduada y descubrió que la altura y el diámetro de la copa mediana miden la mitad de lo que miden en la copa grande. Si obtuvo como datos que la altura y el diámetro de la copa grande son ocho y cinco centímetros respectivamente, determinen:
   - *a*) La cantidad de refresco que cabe en la copa grande y la sobrante en la lata. ____________________
   - *b*) La cantidad de refresco que cabe en la copa mediana y la cantidad que queda en la lata. ____________________
   - *c*) ¿Podrá María llenar las dos copas con el jugo de una sola lata? __________ ¿Por qué? ____________________

3. María prepara paletas congeladas de yogurt en envases con forma de cilindro y de cono, en dos tamaños diferentes. En la siguiente tabla aparecen registradas las medidas de los envases que usa María para congelar las paletas.

Envases por tamaño	Elementos del empaque en forma de cilindro		Elementos del empaque en forma de cono		Elementos de la circunferencia (base del cilindro y del cono)	
	h	V	h	V	r	d
Tamaño A	9 cm	________ cm³	_____ cm	84.82 cm³	3	
Tamaño B	________ cm	169.64 cm³	6 cm	________ cm³		6

En equipo, completen los datos de la tabla. Con base en ello, contesten lo siguiente:

- *a*) ¿Cuál de los cuatro envases tiene menor volumen? __________ ¿Cuál tiene el mayor volumen? ____________________
- *b*) ¿Qué estrategia usaron para determinar la altura del cilindro cuando se conoce la medida de su volumen y la del radio de la circunferencia que conforma la base? ____________________
- *c*) ¿Qué estrategia usaron para determinar la altura del cono cuando se conoce la medida de su volumen y la del radio de la circunferencia que conforma la base? ____________________
- *d*) ¿Qué estrategia usaron para determinar el volumen del cono y el del cilindro? __________ ¿Qué datos se requieren en cada caso? ____________________

En esta lección reconocieron la importancia que tienen los procedimientos algebraicos para la determinación de la medida de algunos elementos de cuerpos geométricos (como cilindros y conos), tomando como base la información inicial. De acuerdo con lo que aprendieron en esta lección, construyan un cono que mida 64 cm³ de volumen y que su altura mida la mitad de lo que mide el diámetro de la circunferencia.

LECCIÓN 5.5

En esta lección analizarás situaciones problemáticas asociadas con fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

PARA APRENDER

En el Bloque 1 aprendiste a representar de manera tabular y algebraica las relaciones de variación cuadrática en distintos contextos; asimismo, el año pasado trabajaste con la variación lineal. Ahora veremos los dos tipos de variaciones en forma conjunta.

GLOSARIO

Vaporcitos: platillo tradicional de la gastronomía de la península de Yucatán. Son tamales pequeños y cocinados al vapor, rellenos de carne molida o pollo, también los hay rellenos de espelón (frijol tierno). Su nombre quizás se deba a que se hacen al vapor como una gran parte de los tamales.

Papadzules: platillo tradicional de la gastronomía de la península de Yucatán. El nombre significa, según algunos mayistas, alimento del amo o bien embarrado y remojado. Es un platillo mestizo, con claras influencias indígenas.

Prospecto: folleto explicativo que llevan algunos productos, especialmente los medicamentos, donde se informa sobre su modo de uso, composición, sus funciones y otros datos útiles.

Actividad 1. Las empresas y sus cuentas

La familia Chac tiene una empresa de comida yucateca. Saben que pueden producir cierta cantidad de vaporcitos sin preocuparse, pues se conservan durante mucho tiempo. Sin embargo, no pueden hacer los papadzules porque si no los venden pronto deberán tirarlos. La hija, estudiante de secundaria, les dijo:

"Hice unas fórmulas matemáticas que aprendí en la escuela para ver cuántos papadzules tenemos que hacer a fin de asegurarnos una ganancia máxima de $625, y otra fórmula para calcular cuánto ganaremos por la venta de vaporcitos".

Las fórmulas, en donde y es la ganancia y x es la cantidad de productos vendidos, son:

$$y_1 = 30x \text{ y } y_2 = -x^2 + 50x$$

a) ¿Cuál corresponde a la ganancia de vaporcitos y cuál a la ganancia de papadzules? Analicen esta situación en grupos de tres compañeros y argumenten sus respuestas. ____________________

b) ¿Qué datos del enunciado les ayudaron a decidir cuál era la fórmula para cada caso? ____________________

c) ¿Cuántos papadzules debe vender la familia Chac para obtener la ganancia máxima? ____________________

d) Comenten con sus compañeros las características que distinguen a cada una de las variaciones de las ganancias.

Actividad 2. Una manera de suministrar medicamento

Los prospectos de muchos medicamentos indican la cantidad de dosis que se debe tomar con base en la edad de la persona. Otros, en cambio, tienen que ver con el peso. Un medicamento dice que la dosis diaria es de 40 mg por kilo de peso, distribuida en tres dosis diarias.

a) Un niño que pesa 24 kg, ¿cuántos mg de medicamento debe consumir? __________

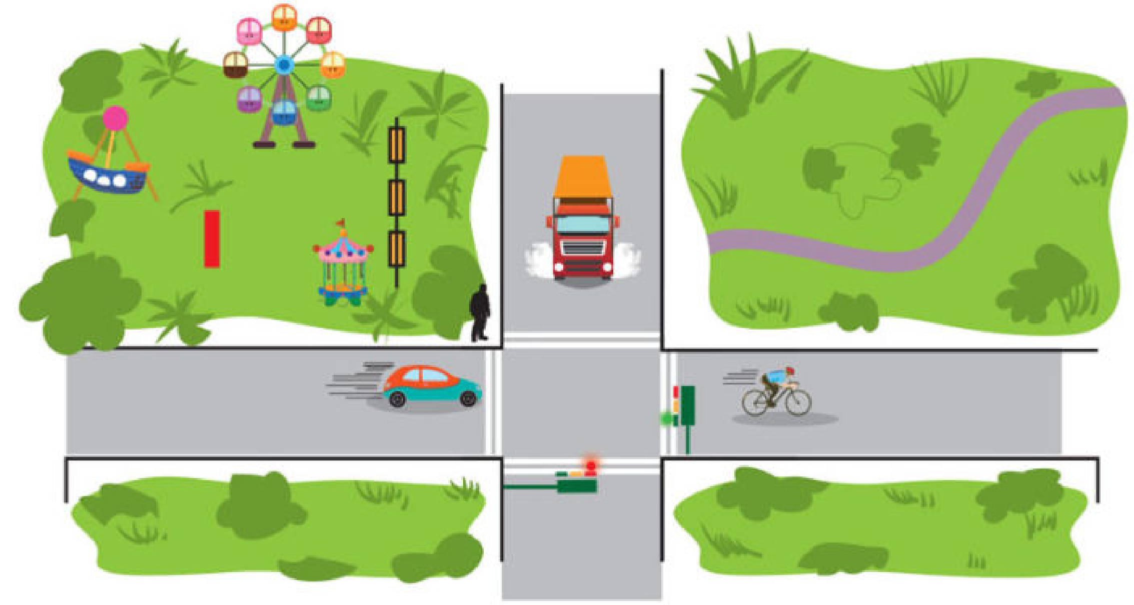
b) Den una expresión algebraica que indique la cantidad de dosis que se debe ingerir según el peso de la persona. Analicen con sus compañeros cuáles serán las variables que tendrán que considerar, defínanlas y argumenten por qué llegaron a esa expresión. ____________________

c) De otro medicamento se sabe que la dosis recomendada para una persona de 15 kg es 33 mg, y para una persona de 69 kg es de 87 mg, ¿podría usarse la fórmula del inciso *b)* para este medicamento? ____________________

i. Si su respuesta es sí, comprueben que puede usarse. Si su respuesta es no, argumenten por qué y escriban una nueva expresión para este medicamento.
____

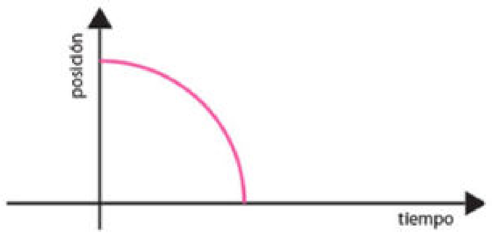
ii. Si escribieron una nueva expresión, ¿qué diferencias y similitudes tienen las dos expresiones construidas? ____________________

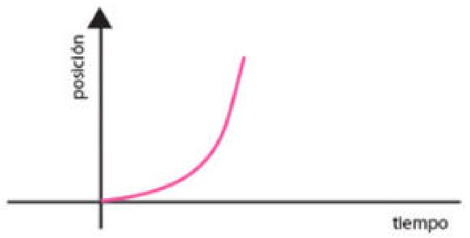
Actividad 3. El movimiento

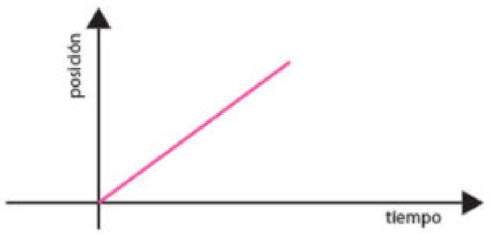


La situación de la figura anterior es común en algunas ciudades. Formen grupos de tres compañeros y describan en sus cuadernos, con sus palabras, el movimiento de cada uno de los protagonistas de la situación: el auto, el camión, la bicicleta y el hombre que está en la esquina.

a) Dadas las gráficas que aparecen a continuación, analicen y decidan cuál corresponde al movimiento de cada protagonista; argumenten ampliamente sus respuestas.







b) ¿Qué características de las gráficas y de la situación fueron determinantes para hacerlos tomar sus decisiones? ____________________

Una síntesis...

En grupos de tres compañeros revisen las lecciones en las que abordaron los temas de variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades y realicen una síntesis, teniendo en cuenta las siguientes preguntas: ¿Qué herramientas utilizaron para abordar las actividades? ¿Qué método les resultó más simple? ¿Cuál consideran que es más efectivo? ¿Qué tipo de variaciones es más común encontrar en nuestra vida cotidiana? Recuerden que hemos trabajado fenómenos cuya variación es lineal y se expresan como $y = ax + b$, o su variación es cuadrática y cuya expresión es $y = ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c pueden tomar cualquier valor numérico.

LOS MÉTODOS

Para concluir, completen la siguiente tabla con las características más relevantes de los fenómenos cuya variación es del tipo lineal o del tipo cuadrática:

	Fenómenos cuya variación es de tipo lineal	Fenómenos cuya variación es de tipo cuadrática
Ejemplos de la vida cotidiana de…		
Expresión algebraica		
Forma de la gráfica		
¿Cómo influye el valor del coeficiente independiente en la gráfica?		
¿Cómo influye el valor *a* en las gráficas?		
Máximo número de términos de la expresión algebraica		
Mínimo número de términos de la expresión algebraica		
Describe la relación entre la variable dependiente y la independiente		

PARA HACER

1. Un señor se dirige al centro del pueblo en su caballo sin ningún apuro. Escucha que detrás de él se acerca un auto muy rápido, por lo cual se hace a un lado de la carretera.

Ahora que saben modelar el movimiento de algunos objetos en situaciones de la realidad, reúnanse en grupos de tres compañeros y discutan las siguientes situaciones:

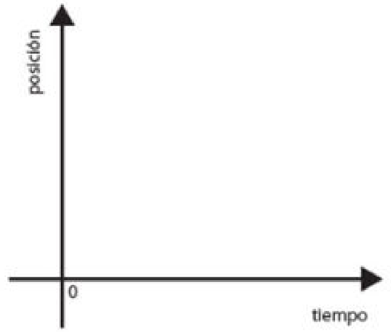
a) ¿Cómo es la variación del movimiento del caballo? ¿Qué están suponiendo respecto de la velocidad a la cual se mueve el caballo? ____________________

____

b) ¿Cómo es la variación del movimiento del auto? ¿Qué están suponiendo respecto de la velocidad a la cual se mueve el auto? ____________________

____

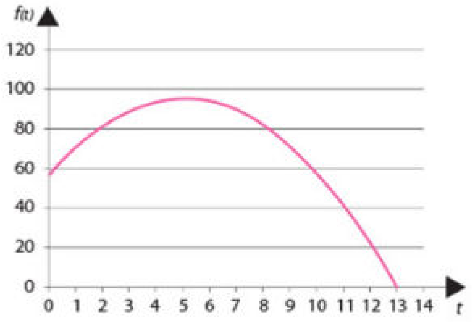
En el plano cartesiano de abajo hagan un bosquejo de cómo serían las gráficas de los movimientos del auto y el caballo. (Tengan en cuenta que el auto está detrás del caballo, por tanto, ¿cómo expresarán esa diferencia de posición al iniciar la situación?)



2. El contador de una empresa textil sabe que si compra una nueva máquina para hacer los colores, las ganancias de la empresa empezarán a subir ya que sus productos serán de mayor calidad y se fabricarán en menor tiempo. Pero también sabe que en algún momento las ganancias comenzarán a disminuir, porque la máquina ya no será tan buena como al comienzo y necesitará mantenimiento, lo cual generará gastos a la empresa. En vista de lo anterior, diseñó una función que modela la situación:

Expresión algebraica de la función: $f(t) = -1.5t^2 + 15t + 58.5$

Gráfica de la función:



TIC

Para complementar y profundizar sus conocimientos, les recomendamos resolver las actividades 22, 23, 26, 27, 28 y 29 del Bloque 3, páginas 52 a 55 y 58 a 67 de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 3*. Asimismo, pueden revisar las actividades 31, 32 y 34 del Bloque 2, páginas 69 a 73 y 76 y 77) de la GIS (*Guía Interactiva para Secundaria*): *Matemáticas 2*, las cuales pueden consultar en: https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (consultada en noviembre de 2013)
Compartan y discutan con sus compañeros las respuestas.

En donde f es la ganancia adicional en miles de pesos y t es el tiempo, medido en años, considerando que $t = 0$ es la fecha en que se compra la máquina. Responden lo siguiente.

a) ¿Cuál es la ganancia cuando se inicia el proyecto de la compra de la máquina? ___________ ¿Cómo se expresa ese monto en la gráfica y en la expresión algebraica de la función? ____

b) Aproximadamente, ¿cuántos años tendrá ganancias adicionales la empresa según la fórmula que diseñó el contador? ____________________________

c) ¿Cuál será la máxima ganancia adicional que se obtendrá y cuándo?

____

d) ¿Cuándo comenzará a generar pérdidas? ______________________________

GLOSARIO

Cardumen: conjunto de peces.

3. En una laguna se introdujeron 100 truchas. Al principio el cardumen creció rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la laguna escasearon y la población decreció. Si la cantidad de truchas de la siembra está expresada por $C(t) = -12t^2 + 21t + 100$, en donde t es el tiempo en meses, ¿se extingue en algún momento la población de truchas? ___________ Si es así, ¿cuándo ocurre esto? Comenten con sus compañeros su respuesta y entre todos arguméntenla.

____

4.[1] En una empresa que renta carros se cobran $200 de base (con seguro incluido) y $3.50 por kilómetro recorrido.

a) Si una familia recorre 180 kilómetros, ¿cuánto pagará? __________________

b) Si recorre 70, 100, 130 o 190 kilómetros, ¿cuánto pagará en cada caso?

____

c) Con los resultados del inciso anterior hagan una tabla de valores. ¿Cómo es la variación en este caso? Justifiquen su respuesta.

____

d) Determinen una expresión algebraica que represente la situación planteada.

____

e) Grafiquen la función.

Como han visto, esta lección es una síntesis del trabajo realizado durante todo este año. Aquí se han relacionado diversas nociones matemáticas que trabajaron en las lecciones anteriores. Como ya se está terminando el año, les proponemos revisarlas, comentarlas con sus compañeros y entre todos escribir una síntesis sobre las nociones matemáticas que les permitieron abordar la tarea de analizar situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que exista variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

---

[1] Actividad basada en http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/funciones-Bachilleres.pdf Consultado el 06/04/2013 a las 09:40 horas

LECCIÓN 5.6

En esta lección aprenderás cuáles son las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

PARA APRENDER

Actividad 1. Tardes de cine

En el Museo Regional de Guerrero se desea instituir una proyección de películas los viernes por la tarde para jóvenes estudiantes de secundaria. La coordinadora de esta actividad aprovechó para llevar a cabo una encuesta exploratoria, dado que un grupo de 12 estudiantes de tercer año de la secundaria Galo Soberón y Parra estaba de visita en el museo. La coordinadora quiere asegurarse de que la temática de las películas sea del agrado de los visitantes, por lo que pregunta a los jóvenes si asistirían o no a ver la película si la temática de las películas fuese "Grandes personalidades de Guerrero que influyeron en la historia de México".

De los 12 estudiantes encuestados, se obtuvieron los siguientes datos:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Asistencia	✓			✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓
No asistencia		✓	✓			✓		✓				

a) ¿Se tiene la misma probabilidad de que ocurra que haya asistentes y que no haya asistentes a la actividad? ____

b) ¿Cuál es la probabilidad de asistencia de los estudiantes a la función? ____________

c) Si hay 312 estudiantes en tercero de secundaria, ¿cuál sería la asistencia esperada con base en el resultado de la encuesta? ____________________________

d) Si se entrevistaran a los 827 estudiantes de tres secundarias de esta ciudad, ¿cuál sería la probabilidad de no asistencia? ____________________________________

e) Entonces podemos decir que la asistencia es __________ probable que la no asistencia a las funciones de cine. O bien, que la no asistencia es _________ probable que la asistencia a esta actividad del museo.

Comenten con sus compañeros sus respuestas e informen al grupo los métodos que utilizaron para responder a estas preguntas. ¿Puede ocurrir que no asista ni una sola persona a las funciones? ____

Actividad 2. El consejo estudiantil

Se desea establecer un consejo estudiantil que, con ayuda de su profesor, tome decisiones sobre las actividades extraescolares. Se decidió tener un presidente, un vicepresidente y un tesorero. De los 47 estudiantes, nueve están interesados en tener alguno de estos cargos; ellos son: Julio, Laura, César, Alfredo, Patricia, Karen, Gabriela, Diego, Manuel y Socorro.

Los estudiantes decidieron que fuera al azar, así que en una urna se colocarán los nombres de cada uno de los aspirantes. Por lo que el primer papelito que se saque corresponderá al presidente, el segundo, al vicepresidente, y el tercero, al tesorero, sin que se devuelvan los papelitos a la urna, dado que sólo se puede tener un cargo en el consejo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Julio sea presidente? _________ ¿Y cuál es la de Socorro? _________ ¿Alguno de los aspirantes tiene mayor probabilidad de ser el presidente que otro? ______________________________

b) Supongamos que ya se eligió al presidente, ¿cuál es la probabilidad que tiene Alfredo de ser vicepresidente? _________ ¿Cuál es la probabilidad que tienen los aspirantes que aún quedan de ganar el cargo de vicepresidente? _______________

c) Supongamos que ya se eligió al presidente y al vicepresidente, ¿cuál es la probabilidad de que Socorro sea tesorera? _________ ¿Cuál es la probabilidad que tienen los aspirantes que aún quedan de ganar el cargo de tesorero? _______________

Formen equipos de tres compañeros y analicen las siguientes situaciones hipotéticas.

d) A pesar de que los diferentes cargos se otorgarán al azar, algunos estudiantes preferirían que Patricia fuera la presidenta del consejo, Julio, el vicepresidente y Laura, la tesorera. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra? _______________

e) ¿La probabilidad sería la misma si Patricia fuera la presidenta, Julio vicepresidente y Socorro tesorera? _________ ¿Por qué? ____________________

Compartan con el resto del grupo los métodos utilizados. Piensen si algunas probabilidades son mayores que otras, o si son equiprobables. Si es así, piensen en las circunstancias que hacen que esto ocurra. Por ejemplo, ¿qué es más probable, que se pueda ser presidente o tesorero?

Reflexionen de manera grupal y determinen cuál de los cargos del consejo estudiantil es más probable de obtener. Completen los siguientes enunciados:

f) Ser presidente es _______ probable que se ser vicepresidente.

g) Ser tesorero es _______ probable que ser vicepresidente.

h) Los nueve aspirantes tienen ____________________ probabilidad de ser presidente.

De manera grupal, y con ayuda de su profesor, comenten si el azar fue la mejor manera de seleccionar a los miembros del consejo estudiantil, es decir, si fue una manera justa de selección y cómo se relaciona esto con las probabilidades de obtener un cargo en el consejo.

Actividad 3. Juego con dados[1]

Paola y Javier juegan a los dados. Paola ganará siete pesos si al tirar el dado sale la cara con el número dos, tres, cuatro, cinco o seis. Si el número que sale es el uno, Javier ganará cierta cantidad de dinero.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar el dado salga un número que haga ganar a Paola? ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar el dado salga el número que haga ganar a Javier? ____________________

Formen equipos y respondan lo siguiente:

c) ¿Cuál debería ser la cantidad que ganara Javier para que el juego fuera justo? ____________________

---

[1] Inspirado en una actividad de Green, D.R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R., Grey y cols. (Eds.), *Procedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield.

d) ¿De qué manera se relaciona la probabilidad de obtener el número uno con la cantidad que debería ganar Javier? ______________________________

Digan al grupo cómo obtuvieron la cantidad que debiera ganar Javier y lo que significa que el juego sea justo. ¿Qué condiciones permitirían que eso ocurriera?

____

Consideren otra opción: que la cantidad que reciba cada uno sea la misma si obtienen una cara que les haga ganar. Entonces, ¿cuántas caras deben hacer ganar a Paola? ¿Y cuántas caras, a Javier? ¿Importa cuáles caras elija cada uno? ¿Por qué?

Comenten grupalmente si estas son condiciones de un juego justo, es decir, con equiprobabilidad.

Una síntesis…

En un experimento puede ocurrir que haya una mayor probabilidad de que ocurran unos eventos, o que tengan la misma probabilidad de ocurrencia. Cuando dos eventos posibles A y B de un experimento tienen la misma probabilidad de ocurrencia, $P(A) = P(B)$, se les conoce como eventos equiprobables. Pudieron identificar cuáles son esas condiciones que permiten la igualdad de probabilidad para juegos de azar, o pudieron determinar aquéllas condiciones que permitirían que un juego de azar fuese justo, al dar a sus jugadores la misma probabilidad de ganar.

De las actividades anteriores, identifiquen dos eventos equiprobables y dos eventos que no lo sean. Comenten sus hallazgos de manera grupal.

LOS MÉTODOS

Como han visto, se pueden obtener diversos resultados en función de las condiciones del experimento mismo. Los resultados que se pueden obtener de experimentos aleatorios son:

"Más probable que"
"Menos probable que"
"No probable o improbable"
"Igualmente probable"

Por ejemplo, de este último podemos decir que dos eventos posibles de un experimento son *equiprobables* cuando… ______________________________

En la Actividad 2 las probabilidades de que cualquiera de los nueve estudiantes aspirantes al cargo de presidente del consejo estudiantil son equiprobables, dado que todos están en las mismas condiciones de participar en la selección azarosa.

Dado que son nueve aspirantes en total, y de éstos sólo se elegirá a uno como presidente, cada uno de ellos tiene la probabilidad de $\frac{1}{9}$ de ganar este cargo. Es por ello que la selección o el juego se considera justo para los participantes, puesto que es equiprobable que obtengan un cargo.

Además, la probabilidad de ser vicepresidente no es equiprobable con la de ser presidente; sin embargo, las probabilidades que tienen cada uno de los ochos aspirantes de obtener este cargo sí son equiprobables. ¿Por qué sucede esto?

____

Pero, ¿cómo es entonces la probabilidad de ser tesorero respecto a la probabilidad de ser vicepresidente?, ¿estos eventos son dependientes o independientes? ¿Esto determina que sean equiprobables o no equiprobables? Comenten con su profesor las reflexiones que han tenido al respecto.

Por otro lado, en la Actividad 3, la probabilidad que tiene Paola de que salga un número que la haga ganar es mayor a la que salga uno que haga ganar a Javier. Sin embargo, si la cantidad que gane Javier fuera distinta a la que gane Paola, el juego sería justo. ¿Qué relación tiene la cantidad que gane Javier respecto a la probabilidad que tiene Paola de que salga un número que la haga ganar?

____

PARA HACER

1. Se tienen tres urnas que no permiten ver su contenido. En la primera hay tres bolas blancas y cuatro negras; en la segunda hay cinco negras y en la tercera hay dos blancas y tres negras.
   - *a*) Si se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra? _______________________
   - *b*) Siguiendo el procedimiento anterior, se ha extraído una bola blanca, ¿es equiprobable que la bola blanca obtenida sea de la primera o de la segunda urna? Expliquen ampliamente su respuesta. _______________________

     ____
2. Formen equipos de tres compañeros. En una hoja de papel dibujen un cuadrado de 25 cm de cada lado, tracen además sus mediatrices y bisectrices.
   - *a*) ¿En cuántas partes se dividió el cuadrado? ¿de qué forma son las figuras en las que se dividió? _______________________
   - *b*) Si lanzan una moneda sobre el dibujo, ¿hay una figura en la que sea más probable que caiga la moneda que en otra? Expliquen por qué.

     ____
3. Supongamos que lanzamos al aire dos monedas. Los eventos que pueden ocurrir son:

   Evento A: Salen dos soles.

   Evento B: Salen dos águilas.

   Evento C: Sale un sol y un águila.
   - *a*) ¿Cuáles eventos son equiprobables entre ellos? _______________________
   - *b*) ¿Cuáles no son equiprobables? _______________________
   - *c*) ¿Qué evento es más probable? Expliquen por qué.

     ____
   - *d*) ¿Podrían imaginar otro evento que sea equiprobable con alguno de estos tres eventos? __________ ¿Cuál sería? __________ ¿Qué condiciones debe cumplir para que sea equiprobable con otro?

     ____
4. Supongamos que tienen dos dados comunes de seis caras cada uno, los cuales están numerados del uno al seis.

En equipos, resuelvan lo siguiente.

- *a*) Describan el experimento que debe efectuarse para obtener estos resultados, utilizando los dos dados. ¿Qué relación deben establecer entre los números que salgan en cada dado para que los resultados sean los que aparecen en los recuadros blancos? _______________________

		Dado uno					
		1	2	3	4	5	6
Dado dos	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

- *b*) ¿Es equiprobable obtener como resultado un tres que obtener un dos? ¿Por qué? _______________________
- *c*) ¿Qué resultados son equiprobables? _______________________
- *d*) ¿Qué resultados no son equiprobables? ¿Por qué? _______________________

  ____
- *e*) ¿Cuáles pueden ser dos eventos que sean equiprobables, derivados del experimento que definieron? ¿Cuál fue su estrategia para determinar estos dos eventos equiprobables? _______________________

  ____
- *f*) Establezcan un juego que sea justo dada la tabla de resultados del lanzamiento de dos dados. Recuerden considerar la equiprobabilidad como una condición de equidad en el juego.

En esta lección pudieron analizar diversas situaciones que tenían distintas probabilidades de ocurrencia. Por ejemplo, algunos fueron *no equiprobables,* por lo que era *más probable* su ocurrencia en comparación con la de otros, o su ocurrencia era *menos probable*; asimismo, se percataron de que hay eventos *equiprobables*.

Reflexionen en grupo las características que deben considerarse para que dos eventos sean equiprobables y para que no sean equiprobables. Establezcan de manera grupal una manera para identificar las condiciones que permitan que dos eventos sean equiprobables, o que no lo sean. También, identifiquen las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo.

EVALUACIÓN

1. **El examen**

En un examen de 100 preguntas, Rosa dejó sin contestar ocho y obtuvo 400 puntos. Por cada respuesta correcta se asignan cinco puntos y por cada incorrecta se restan dos puntos.

a) ¿Cómo puedes saber cuántas preguntas respondió correctamente y cuántas incorrectamente?

____

b) Calcula el número de respuestas correctas y el de incorrectas. ____________________

2. **Volumen de la solución**

Se necesitan dos ingredientes distintos (A y B) para producir una sustancia. Deben disolverse primero en agua antes de ponerlos a reaccionar. La solución A contiene 1.5 gramos por centímetro cúbico (g/cm^3) y si se combina con la solución de B (cuya concentración es de 3.6 g/cm^3) produce 13.42 g de la sustancia. Si las proporciones de A y B en esas soluciones se cambian a 2.5 y 4.3 g/cm^3 (permaneciendo iguales los volúmenes), se obtiene 17.08 g de la sustancia.

a) ¿Cuáles son las expresiones matemáticas que representan cada concentración?

____

b) ¿Cuáles son los volúmenes, en centímetros cúbicos, de las soluciones que contienen A y B? ____

3. **Almacenamiento de maíz**

El maíz es uno de los granos que más se cultivan en México, dada su importancia para la alimentación diaria de la población. Se producen anualmente aproximadamente 21 500 millones de toneladas y por lo tanto su almacenamiento es muy importante para los pequeños y grandes productores. En una pequeña granja del interior del país se quiere construir un depósito de maíz en forma de un cilindro recto que en la parte inferior termine como un cono recto. Tanto el cilindro como el cono deben tener diámetros iguales de 8 m. Pero la altura del cilindro debe ser del doble de la del cono, para facilitar el vaciado del maíz. Se requiere que el depósito contenga 234 m^3 de maíz, que es la producción más alta que ha tenido el lugar.

a) ¿Qué forma tendrá el depósito de maíz? Dibújalo. ____________________

b) ¿Cuál deberá ser la altura del depósito? ____________________

c) ¿Cuáles serían las ventajas de tener un depósito en el que la parte superior tenga forma de cono? ____
¿La cantidad de maíz que se podría almacenar sería la misma?

____

4. **Conito a conito se llena el vasito**

Alex bebe agua en conos de ocho centímetros de diámetro y 12 de altura. ¿Cuántos cm^3 de agua puede beber como máximo cada vez que llena un cono?

a) 64 cm^3

b) 192 cm^3

c) 256 cm^3

d) 758 cm^3

5. **Las cónicas en tu entorno**

Las cónicas son muy importantes para comprender y estudiar todo tipo de fenómenos. Relaciona cada situación con la sección cónica correspondiente.

a) Hipérbola *b*) Elipse *c*) Parábola *d*) Circunferencia

( ) Las órbitas planetarias tienen esta forma. Así que el estudio de éstas permite determinar la posición futura de los planetas entre otras muchas cosas.

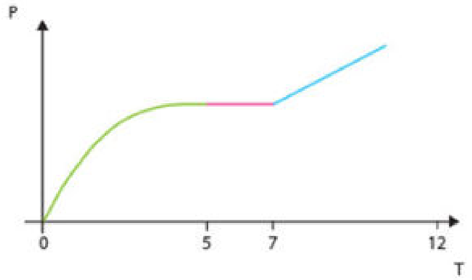
( ) Otros cuerpos celestes, como los cometas, describen esta trayectoria.

( ) Las antenas para ver televisión vía satélite tienen esta forma, puesto que es adecuada para concentrar la señal en un solo punto.

( ) Ésta es una de las formas más difundidas en la naturaleza y en nuestro entorno: el corte de una naranja, las ondas que se forman al tirar una piedra al agua y la forma de un disco compacto son algunos ejemplos.

6. **En el pueblo de la abuela**

En el pueblo de mi abuela cuentan una historia de un jinete que a caballo acarreaba al ganado en el campo, siempre con la misma técnica. Una representación gráfica de la posición del caballo en función del tiempo de traslado, es la siguiente:



Señala con una X cuál de las siguientes narraciones sería la más adecuada para esa gráfica.

a) El caballo acelera hasta llegar al corral durante cinco minutos, se detiene siete minutos y luego avanza a velocidad constante para acarrear al ganado durante 12 minutos más.

b) El caballo acelera hasta llegar al corral durante cinco minutos, se detiene dos minutos y luego avanza a velocidad constante para acarrear al ganado durante cinco minutos más.

c) El caballo desacelera hasta llegar al corral durante cinco minutos, se detiene siete minutos y luego avanza de manera acelerada para acarrear al ganado durante 12 minutos más.

d) El caballo desacelera hasta llegar al corral durante cinco minutos, se detiene dos minutos y luego avanza de manera acelerada para acarrear al ganado durante cinco minutos más.

7. **¡Otro lanzamiento de dados!**

Fernanda y Javier juegan con dos dados regulares de seis caras, numeradas del 1 al 6. El juego consiste en elegir un número cualquiera y lanzar los dados, si la suma de los números que se obtengan en ambos dados coincide con el número elegido, entonces gana quien haya elegido dicho número.

i. Fernanda elige el número nueve. ¿Qué número debería escoger Javier para tener la misma probabilidad de ganar que Fernanda y que de esta manera el juego sea justo?

a) 10	*b)* 6	*c)* 5	*d)* 4

ii. Con los datos del juego anterior, ¿cuáles de lo siguientes grupos de números representan eventos equiprobables al lanzar los dados?

a) 7 y 12; 8 y 6; 10 y 4; 3, 2 y 11.	*b)* 11 y 3; 10 y 4; 9 y 5; 12 y 2; 8 y 6.
c) 11 y 3; 10 y 4; 9 y 5; 12 y 2; 8, 7 y 6.	*d)* 12, 11 y 3; 10 y 4; 8 y 7; 9 y 5, 6 y 2.

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que Fernanda gane al obtener 9 como la suma de un 4 y un 5?

a) $0.0\overline{5}$	*b)* $\frac{1}{18}$	*c)* 16%	*d)* $\frac{1}{36}$

iv. ¿Cuál es la probabilidad de que Fernanda obtenga en el primer dado el número 4 y el número 5, en el segundo?

a) $0.0\overline{5}$	*b)* $\frac{1}{18}$	*c)* 16%	*d)* $\frac{1}{36}$

Autoevaluación

Reflexiona acerca de lo que has aprendido en este bloque para resolver los problemas anteriores. Reproduce esta tabla en tu cuaderno y complétala considerando una escala del 1 al 5, donde 1 es "Totalmente en desacuerdo" y 5 "Totalmente de acuerdo".

Utilicé en la resolución de situaciones	Logré comprender y aplicar los conocimientos al resolver situaciones con	Usaría en la vida cotidiana lo que aprendí con
Las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.		
La idea de anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.		
Las estrategias de leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.		
La probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.		

Coevaluación

Con un par de compañeros intercambien sus evaluaciones, comenten y comparen las respuestas que propusieron en ellas y analicen coincidencias y diferencias. Preparen una explicación para cada problema de la evaluación y conviertan sus inquietudes o dificultades en preguntas para compartirlas con el grupo y su profesor. Reflexionen también, con sus compañeros y profesor, sobre lo que contestaron en la tabla de autoevaluación. Es importante compartir tus dificultades y tus fortalezas con tus compañeros; aprovechen ese espacio para aclarar cada duda que tengan y consolidar sus conocimientos.

Los invitamos a que después del debate completen una tabla producto del consenso del grupo. Esta experiencia les servirá para consolidar sus aprendizajes.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía consultada

Alanís, Juan Antonio et al., *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Editorial Trillas, 2008, 2005, 2003, 2000.

Ávila, Alicia y García, Silvia, *Los decimales, más que una escritura: reflexiones sobre su estrategia de aprendizaje*. México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2008.

Batanero, Carmen, *Significado y comprensión de las medidas de posición central, UNO 25*, 2000 pp. 41-58.

Batanero, Carmen, José Godino. *Análisis de datos y su didáctica*. Documento interno de trabajo para la asignatura. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada 2001.

Brousseau, Guy, *Theory of didactical situations in mathematics.Didactique des mathématiques, 1970-1990*, Great Britain, Kluwer Academic Publishers 1997.

Cabañas, Guadalupe et al., *Matemáticas 3. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático*, México, 2010.

Cáceres, José. *Conceptos básicos de Estadística para ciencias sociales*, España: Delta Publicaciones 2007, pp. 163.

Cobo, Belén, Carmen Batanero. *La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? UNO 23*, 2000, pp. 85-96.

Cordero, Francisco et al., *Modelación del movimiento en un cotidiano y su resignificación para el salón de clases*, Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 2009.

Covián, Olda, *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México, 2005.

Godino, José, Francisco Ruiz. *Geometría y su didáctica para maestros. Manual para estudiantes. 2002.* Descargado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Green, D.R. A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R., Grey y cols. (Eds.), *Procedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, 1983. pp. 766-783). Universidad de Sheffield.

Hernández-Del-Valle, A., Onésimo Hernández-Lerma. *Elementos de probabilidad y estadística*. México: Textos 21. 2003, p. 105.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía. *Anuario estadístico de los Estados Unidos Mexicanos 2011* / Instituto Nacional de Estadística y Geografía. México: INEGI, c2012.

Lamon, Susan, *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*, Marquette University. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey. 1999.

Landaverde, Francisco, *Curso de Geometría*, México: Editorial progreso 1987.

Llinares, Salvador, María Sánchez. *Fracciones*, España: Síntesis 1988.

López-Mojica, José Marcos, Ana María Ojeda. *Introducción a la Variable Aleatoria en Educación Especial*. En Aparicio y Rodríguez (Eds.), Memorias de la XIII Escuela de invierno en Matemática Educativa. México: Red-Cimates. 2010, pp. 70-76.

Montero, José, *Estadística Descriptiva*. Thomson: Madrid, España 2007. En la web: http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=D6sj2d0xTgUC&oi=fnd&pg=PR4&dq=desviaci%C3%B3n+media+y+dispersi%C3%B3n+de+datos&ots=4lPeRRoxsO&sig=VlaNWHnpbuvBuG9FR_GKjkxp3ps#v=onepage&q&f=false

Moulines, Carlos, *La metaciencia como arte*, En J. Wagensberg (Ed.), *Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea*; Tusquets Editores 2004, pp. 41-62.

Olmo, María Ángeles, María Francisca Moreno y Francisco Gil, *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* España, Síntesis 1993.

Puig, Luis. *Historias de al-Khwārizmī* (7a entrega). *Figuras y demostraciones.* Suma 68, 2011. pp. 93-102

Rodríguez Arteaga, Carlos, Alcides Cabrera Campos. *La desventaja de la media aritmética: cómo tratarla en clases.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas 74, 2010, pp. 39-44.

Rosado, Pilar, *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*, Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F. 2004.

SEP. *Geometría Dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología.* México: SEP-ILCE 2000.

SEP. Programas de estudio. Guía del maestro 2011. Educación básica secundaria 2011.

Referencias para los alumnos

Páginas de interés relativas a números enteros y sus operaciones

http://www.aaamatematicas.com/cmp64b32.htm
http://www.escolar.com/matem/13nument.htm
http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/ unid-4/actividades.htm
Fecha de última consulta: 05/10/2012

Páginas relativas a secuencias numéricas y patrones

En estas ligas se presentan varios casos en que los estudiantes deberán determinar el número que falta en determinado patrón, así como determinar ciertos patrones. http://www.aaamatematicas.com/pat.htm
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Progresiones/index.htm
Fecha de última consulta: 05/10/2012

Ecuaciones de primer grado

Una página interactiva sobre distintos tipos ecuaciones de primer grado:
http://www.aaamatematicas.com/equ72332.htm
Raíz cuadrada http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/raiz/index. htm#intro
Material interactivo con retos matemáticos diversos. Preparado para la exposición internacional ICME ¿Por qué las matemáticas?http://www.experiencingmaths.org/

Juegos interactivos de proporcionalidad; porcentaje

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/ies_azahar/MATEMATICAS1/porcentajes/menu.html
Estadísticas de población estudiantil de la UNAM: http://es.wikipedia.org/wiki/UNAM
http://www.estadistica.unam.mx/series_inst/index.php
Fecha de última consulta: 05/10/2012

Páginas de interés relativas al eje de forma, espacio y medida

http://www.conevyt.org.mx/cursos/
http://www.metas.com.mx/utilerias/convertidormasa.php
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/capaz_d3/inscritos.html
http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/Simetrias/simetria_axial.htm#javascript
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/capaz_d3/cuerdas.html
http://www.conevyt.org.mx/cursos/inea/ineapdfs/mate/opavanza/l2unidac.pdf
http://apuntesdearquitecturadigital.blogspot.mx/2011/11/la-piramide-de-louvre-arquitecto-ieoh.html

BIBLIOGRAFÍA

http://www.metas.com.mx/utilerias/convertidormasa.php
Fecha de última consulta: 05/10/2012

Referencias para los profesores

Block, David et al., *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: Somos maestros, enseñar y aprender-Cinvestav 2010.

Cantoral, Ricardo, Rosa María Farfán. *Matemática Educativa: Una visión de su evolución*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1), 2003 pp. 27 – 40.

Farfán, Rosa María, *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Barcelona, España: Gedisa. 2012.

Olmo, María Ángeles, María Francisca Moreno y Francisco Gil, *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* España, Síntesis 1993.

Prado, María Dolores y Rodríguez, Ricardo. *¿Cómo enseñar divisibilidad?* España, Anaya, 1982.

Recursos de investigación e innovación didáctica

Correo del maestro. Revista para profesores de educación básica
http://www.correodelmaestro.com/
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
http://www.clame.org.mx/relime.htm
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
http://www.clame.org.mx/ acta.htm
Revista Educación Matemática
http://www.santillana.com.mx/educacionmatematica/
Boletim de Educação Matemática
http://www2.rc.unesp.br/bolema/
Revista Latinoamericana de Etnomatemática
http://www.etnomatematica.org/home/?page_id=31
Revista EPSILON de la SAEM THALES
http://thales.cica.es/epsilon/
PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática
http://www.pna.es/
UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática
http://www.fisem.org/web/union/
Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros/
Revista Electrónica de Investigación en Educación de las Ciencias
http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/
Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias
http://www.saum.uvigo.es/reec/
Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas
http://ensciencias.uab.es/
Revista Mexicana de Investigación Educativa
http://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php
Fecha de última consulta: 05/10/2012

Créditos iconográficos

Banco de imágenes Shutterstock, fotografías págs.: 21, 75, 77, 144, 227, 231, 233 (Torre de Pisa), 238 (lámpara de mimbre, abajo al centro).

Banco 123 rf, pág. 238 (lámpara cónica superior izquierda y lámpara cilíndrica del lado derecho)

Acervo de la editorial: fotografía pág. 175.